

Capitolo 1

Teoria dei campi - Riassuntone

1.1 Rottura spontanea della simmetria

1.1.1 Il teorema di Goldstone

Il teorema di Goldstone afferma che in presenza di una simmetria rotta spontaneamente, nascono dei campi senza massa, i cosiddetti bosoni di Goldstone. Le ipotesi per la validità del teorema sono tre:

- la simmetria rotta sia continua;
- la teoria deve essere manifestamente covariante;
- lo spazio di Hilbert degli stati deve avere norma definita positiva.

Nel caso di una teoria di gauge queste condizioni non possono essere automaticamente soddisfatte, ad esempio in QED siamo costretti a rinunciare alla norma positiva se scegliamo la gauge di Lorentz, o alla covarianza della teoria se scegliamo la gauge di Coulomb. Sappiamo inoltre che nel caso della rottura spontanea di una simmetria di gauge si ha un meccanismo, detto *meccanismo di Higgs*, secondo il quale con una opportuna scelta di gauge (*il gauge unitario*) i bosoni di Goldstone corrispondenti ai generatori della simmetria che sono rotti spariscono e i campi di gauge corrispondenti acquistano massa.

1.1.2 Il caso di $O(2)$

Nel caso di una teoria scalare invariante sotto la simmetria globale $O(2)$, abbiamo una lagrangiana di questa forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_i)(\partial^\mu \phi_i) - \frac{\mu^2}{2}\phi_i\phi_i - \frac{\lambda}{4}(\phi_i\phi_i)^2$$

Gli ultimi due termini rappresentano il termine di potenziale che avrà il compito di rompere la simmetria:

$$V(\phi) = \frac{\mu^2}{2}\phi_i\phi_i + \frac{\lambda}{4}(\phi_i\phi_i)^2$$

Questa lagrangiana infatti è invariante sotto rotazioni nello spazio 2-dimensionale dei campi ϕ_1 e ϕ_2 , una volta che definiamo il vettore

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

Si può mostrare che il valore di aspettazione sul vuoto del campo $\vec{\phi}$ dipende dal segno del parametro μ^2 , in altre parole dalla forma del potenziale. Per $\mu^2 > 0$ infatti il potenziale ha la forma

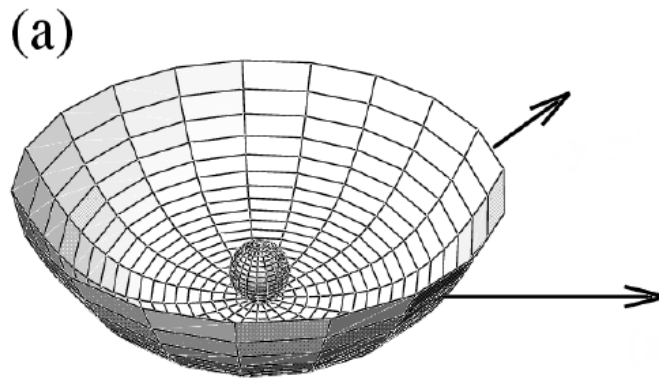


Figura 1.1: Potenziale quadratico

mentre per $\mu^2 < 0$

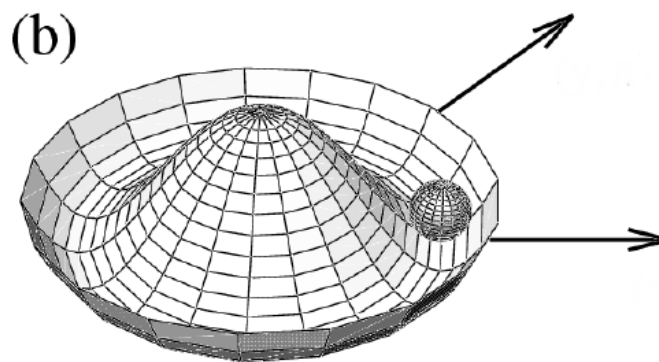


Figura 1.2: Potenziale “a cappello messicano”

Nel secondo caso, il minimo del potenziale (e quindi il punto su cui definire il vero vuoto della teoria) si ha per un certo valore fissato del modulo del campo:

$$\phi_i \phi_i = \frac{-\mu^2}{\lambda} = v^2$$

Dunque si ha una circonferenza di minimi nel piano ϕ_1, ϕ_2 , che corrisponde a infinite possibili scelte dello stato di vuoto. Ad esempio possiamo parametrizzare il campo $\vec{\phi}$ in modo che soltanto la componente inferiore acquisti valore di aspettazione sul vuoto:

$$\langle \vec{\phi} \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

In questo modo il campo $\vec{\phi}$ può essere scritto come

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \chi + v \end{pmatrix} = \vec{\phi}_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

dove ϕ_1 e χ sono due campi con valore di aspettazione nullo sul vuoto, in termini dei quali ha senso sviluppare la teoria. Se esprimiamo il potenziale in funzione del nuovo campo:

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + (\chi + v)^2) + \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + (\chi + v)^2)^2 = \\ &= \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + (\chi + v)^2) + \frac{\lambda}{4}(\phi_1^4 + (\chi + v)^4 + 2\phi_1^2(\chi + v)^2) \end{aligned}$$

In particolare siamo interessato ai termini quadratici nei campi, che corrispondono a termini di massa. Abbiamo per il campo χ :

$$\frac{1}{2}\mu^2\chi^2 + \frac{3}{2}\lambda v^2\chi^2$$

ma ricordando che $v^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}$

$$\frac{1}{2}\mu^2\chi^2 - \frac{3}{2}\mu^2 = \frac{1}{2}(-2\mu^2) > 0$$

dunque il campo χ acquista una massa reale $\sqrt{-2\mu^2}$. Per ϕ_1 si ha

$$\frac{1}{2}\mu^2\phi_1^2 + \frac{\lambda}{4}(2v^2\phi_1^2) = 0$$

per cui effettivamente la rottura spontanea della simmetria continua $O(2)$ ha generato un campo scalare senza massa: ci riferiremo quindi a ϕ_1 come al bosone di Goldstone.

Un campo generico $\vec{\phi}'$ si può ottenere dal campo iniziale $\vec{\phi}$ mediante una rotazione ortogonale:

$$\begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

e la lagrangiana deve risultare invariante sotto questa trasformazione. Se consideriamo una trasformazione infinitesima, $\cos \theta \sim 1$ e $\sin \theta \sim \theta$ e

$$\phi'_1 \sim \phi_1 - \theta\phi_2 = \phi_1 - \theta\chi - \chi v \Rightarrow \delta\phi_1 \sim -\theta\chi - \theta v$$

$$\phi'_2 \sim \phi_2 + \theta\phi_1 \Rightarrow \delta\phi_2 \sim \theta\phi_1$$

In altre parole, la lagrangiana risulta invariante sotto una rototraslazione del campo ϕ_1 , cioè del bosone di Goldstone: il fatto che tale campo sia senza massa è quindi una richiesta necessaria affinché la lagrangiana non contenga termini del tipo $m^2\phi_1^2$, chiaramente non invarianti sotto traslazioni del campo ϕ_1 .

Se promuoviamo la simmetria da globale a locale, il parametro θ diventa una funzione $\theta(x)$ e possiamo scrivere

$$\delta\phi_1 \sim -\theta(x)\chi - \theta(x)v$$

$$\delta\phi_2 \sim \theta(x)\phi_1$$

Questo ci dice che con una trasformazione di gauge opportuna è possibile eliminare il campo ϕ_1 , associato al bosone di Goldstone. Per capire che conseguenze ha questo procedimento è più conveniente passare a coordinate complesse per i campi ϕ_1 e ϕ_2 :

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{\phi_2 + i\phi_1}{\sqrt{2}} \\ \phi^\dagger &= \frac{\phi_2 - i\phi_1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

In questo modo la lagrangiana diventa

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi) - \mu^2(\phi^\dagger \phi) + \lambda(\phi^\dagger \phi)^2$$

ed è invariante sotto trasformazioni di fase globali della forma

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow e^{-i\theta} \phi \\ \phi^\dagger &\rightarrow e^{-i\alpha} \phi^\dagger\end{aligned}$$

Abbiamo quindi cambiato lo scenario da una simmetria di gauge sotto $O(2)$ a una simmetria di gauge sotto $U(1)$. Sappiamo però che un cambiamento del genere implica l'utilizzo della derivata covariante al posto della derivata usuale:

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - igA_\mu$$

dove A_μ è il campo di gauge. Stiamo effettuando il cosiddetto *gauging* della teoria, in particolare stiamo considerando l'elettrodinamica scalare.

N.B.: Abbiamo cambiato la notazione rispetto a Casalbuoni, in cui le derivate covarianti si definiscono come $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ig$, e stiamo usando la notazione del Peskin e del Cheng Li. Questo sarà la causa del 99% delle ambiguità di segno di qui in avanti.

La lagrangiana si riscrive:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu + igA_\mu)\phi^\dagger(\partial^\mu - igA^\mu)\phi - \mu^2(\phi^\dagger \phi) - \lambda(\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Scriviamo il campo ϕ in coordinate polari:

$$\phi = \rho(x)e^{i\theta(x)}$$

dove ρ e θ sono due funzioni reali. Se $\mu^2 < 0$, il minimo del potenziale si ha per un valore di $\phi^\dagger \phi = \frac{\rho^2}{2} = \frac{v^2}{2} \neq 0$, il che equivale a dire che il campo ρ acquista sul vuoto valore di aspettazione v . Sotto la trasformazione di gauge $\phi \rightarrow e^{i\alpha(x)} \phi$ il campo ρ è invariato, mentre il campo θ va in $\theta(x) + \alpha(x)$, dunque quest'ultimo è il bosone di Goldstone associato alla trasformazione, non potendo la lagrangiana contenere un termine di massa per lui. Con la particolare scelta di gauge $\alpha(x) = -\theta(x)$ (*gauge unitario*) possiamo eliminarlo del tutto dalla lagrangiana e ottenere:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu + igA_\mu)\rho(\partial^\mu - igA^\mu)\rho - \frac{1}{2}\mu^2\rho^2 - \frac{1}{4}\lambda\rho^4 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Poichè ρ ha VEV (Vacuum Expectation Value, valore di aspettazione sul vuoto) diverso da zero, possiamo anche in questo caso definire un campo χ con VEV nullo

$$\rho = \chi + v$$

e inserirlo nella lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu + igA_\mu)(\chi + v)(\partial^\mu - igA^\mu)(\chi + v) - \frac{1}{2}\mu^2(\chi + v)^2 - \frac{1}{4}\lambda(\chi + v)^4 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Nascono vari termini, in particolare tra quelli quadratici abbiamo

$$\frac{1}{2}\mu^2\chi^2 + \frac{3}{2}\lambda v^2\chi^2 = \frac{1}{2}(-2\mu^2)\chi^2$$

che ci informa che anche stavolta il campo χ (l'analogo del campo ϕ_2 di prima) ha massa reale $\sqrt{-2\mu^2}$. Più interessante invece il termine quadratico in A_μ :

$$\frac{1}{2}g^2v^2A^\mu A_\mu$$

Nel passaggio al gauge unitario, quindi, è scomparso il bosone di Goldstone $\theta(x)$ e il campo di gauge A_μ ha acquistato una massa $m_A = gv$. La predizione del teorema di Goldstone è quindi verificata.

Dal punto di vista dei gradi di libertà, siamo partiti da due gradi di libertà scalari, dovuti ai campi ϕ, ϕ^\dagger (o equivalentemente ρ e θ), e due gradi di libertà vettoriali dovuti al campo di gauge A_μ , senza massa; adesso abbiamo perso il grado di libertà relativo a θ ma il campo A_μ ha acquistato massa, e si è “sbloccato” il suo terzo grado di libertà longitudinale.

1.1.3 Quantizzazione in gauge non unitario

Il gauge unitario elimina i gradi di libertà relativi ai bosoni di Goldstone, ma non sempre è la scelta migliore. Vediamo cosa sarebbe successo se avessimo mantenuto nella lagrangiana il campo θ , considerando soltanto il termine di derivata covariante:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left| \partial_\mu \rho e^{i\theta} + i\rho \partial_\mu \theta e^{i\theta} + ig\rho A_\mu e^{i\theta} \right|^2 &= \frac{1}{2} \left((\partial_\mu \rho)^2 + \rho^2 (\partial_\mu \theta)^2 + g^2 \rho^2 A_\mu A^\mu + 2g\rho^2 (\partial_\mu \theta) A^\mu \right) = \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \rho)^2 + \frac{1}{2} \rho^2 (\partial_\mu \theta)^2 + \frac{1}{2} g^2 \rho^2 A_\mu A^\mu + g\rho^2 (\partial_\mu \theta) A^\mu \end{aligned}$$

Il secondo e il quarto termine in particolare, quando sostituiamo $\rho = \chi + v$, danno origine a termini di interazione della forma

$$\begin{aligned} v^2 g (\partial_\mu \theta) A^\mu &= \dots \dots \times \text{~~~~~} \\ \frac{1}{2} g^2 v^2 A_\mu A^\mu &= \text{~~~~~} \bullet \text{~~~~~} \end{aligned}$$

Dove con la croce e il punto abbiamo indicato i vertici di interazione. Termini come il primo sono associati al fatto che stiamo lavorando con dei campi che non sono autostati di massa: nella base degli autostati di massa, infatti, la lagrangiana non contiene termini di mixing tra i campi, in altre parole la matrice di massa $V_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j}$ è diagonale. La massa di una particella tra le altre cose condiziona il propagatore corrispondente ad avere un polo ad un ben determinato valore; nella lagrangiana gauge-invariante da cui siamo partiti, un termine di massa $m^2 A_\mu A^\mu$ non era consentito, dunque il propagatore del campo di gauge era il propagatore di una particella massless, con un polo in $k^2 = 0$. Adesso però dobbiamo considerare nella

serie perturbativa della funzione a due punti $\langle A_\mu A_\nu \rangle$ anche tutte le possibili inserzioni dei nuovi vertici di interazione, ovvero:

$$\text{~~~~~} + \text{~~~~~} \times \cdots \times \text{~~~~~} + \text{~~~~~} \bullet \text{~~~~~} + \dots$$

Le regole di Feynman per i vertici di interazione, con la convenzione che per impulsi entranti $\partial_\mu \theta \rightarrow -ip_\mu$ e per impulsi uscenti $\partial_\mu \theta \rightarrow ip_\mu$, sono:

$$\begin{aligned} \dots \times \text{~~~~~} &= \frac{\delta i v^2 g (\partial_\mu v \theta) A^\mu}{\delta \theta(p) \delta A_\nu(q)} = m_A p_\mu \\ \text{~~~~~} \bullet \text{~~~~~} &= \frac{\delta i v^2 g^2 A_\mu A^\mu}{\delta A_\nu(p) \delta A_\rho(q)} = i m_A^2 g^{\nu\rho} \end{aligned}$$

Osserviamo che abbiamo derivato funzionalmente rispetto a $v\theta$ e non rispetto a θ , perchè il campo θ è adimensionale, mentre i campi scalari devono avere dimensione di massa 1. Inoltre essendo $v\theta$ un campo scalare senza massa, avrà propagatore

$$\dots \frac{i}{k} \dots$$

Se indichiamo con $C_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$ il tensore associato al propagatore trasverso del campo di gauge, la serie perturbativa si scrive

$$\begin{aligned} \text{~~~~~} + \text{~~~~~} \times \cdots \times \text{~~~~~} + \text{~~~~~} \bullet \text{~~~~~} &= \\ &= \frac{-i}{k^2} C_{\mu\nu} + \frac{-i}{k^2} C_{\mu\rho} \left(\frac{-i m_A^2 k^\rho k^\sigma}{k^2} \right) \frac{-i}{k^2} C_{\sigma\nu} + \frac{-i}{k^2} C_{\mu\rho} (i m_A^2 g^{\rho\sigma}) \frac{-i}{k^2} C_{\sigma\nu} = \\ &= \frac{-i}{k^2} C_{\mu\nu} + \frac{-i}{k^2} C_{\mu\rho} i m_A^2 \left(g^{\rho\sigma} - \frac{k^\rho k^\sigma}{k^2} \right) \frac{-i}{k^2} C_{\sigma\nu} = \frac{-i}{k^2} C_{\mu\nu} + \frac{-i}{k^2} C_{\mu\rho} i m_A^2 C^{\rho\sigma} \frac{-i}{k^2} C_{\sigma\nu} \end{aligned}$$

Osservando che $C_{\mu\nu}$ è un proiettore, quindi $C_{\mu\rho} C^{\rho\sigma} = C_\mu^\sigma$:

$$= \frac{-i}{k^2} C_{\mu\nu} + \frac{m_A^2}{k^2} \frac{-i}{k^2} C_{\mu\nu}$$

Nell'ottica in cui m_A è piccola, possiamo considerare questo risultato come il prim'ordine dello sviluppo di $\frac{1}{k^2 - m_A^2}$

$$\frac{-i}{k^2 - m_A^2} C_{\mu\nu} \sim \frac{-i}{k^2} C_{\mu\nu} \left(1 + \frac{m_A^2}{k^2} \right)$$

Abbiamo quindi verificato che il campo di Goldstone è il responsabile della massa del campo di gauge, anche in un gauge diverso da quello unitario.

1.2 Teorie con bosoni di gauge massivi

1.2.1 Simmetria di gauge esplicitamente rotta

Nella QED, il mediatore dell'interazione elettromagnetica è il fotone, una particella senza massa. Il range di tale interazione, pertanto, sarà infinito, come sappiamo già dall'elettromagnetismo classico. Dalla scoperta delle interazioni forti e deboli, però, ci si trovò nella necessità di dover descrivere interazioni a range cortissimo, dell'ordine del fermi (interazioni forti) o del millesimo di fermi (interazioni deboli), dunque in una descrizione di tipo Yukawiano a dover utilizzare un potenziale schermato della forma

$$V_Y = \frac{e^{-mr}}{r}$$

dove m è la massa della particella mediatrice, il cui inverso approssimativamente rappresenta il range dell'interazione mediata: $1fm \rightarrow 200MeV$ e $10^{-3}fm \rightarrow 200GeV$.

L'idea più immediata potrebbe essere quella di considerare una teoria per un campo vettoriale massivo, ovvero con una lagrangiana della forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}W_\mu W^\mu$$

In questo modo il campo W^μ soddisfa alle seguenti equazioni di moto:

$$(\square + m^2)W^\mu - \partial^\mu(\partial_\lambda W^\lambda) = 0$$

La presenza di un termine di massa nella lagrangiana la rende non invariante sotto trasformazioni di gauge, a differenza del termine $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, dunque ad esempio non possiamo scegliere arbitrariamente la gauge. Tuttavia possiamo decidere di espandere il campo nello spazio degli impulsi su una base di 4 vettori linearmente indipendenti così definiti:

$$\begin{aligned}\epsilon_{(0)}^\mu(k) &= \frac{k^\mu}{m} = \frac{1}{m} \left(E, \vec{k} \right) \\ \epsilon_{(i)}^\mu(k) &= (0, \vec{n}_i) \quad \vec{n}_i \cdot \vec{k} = 0 \quad (i = 1, 2) \\ \epsilon_{(3)}^\mu(k) &= \frac{1}{m} \left(|\vec{k}|, E \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \right)\end{aligned}$$

É facile verificare che $\epsilon_{(i)}^\mu k^\mu = 0$ per $i = 1, 2, 3$, possiamo dunque espandere

$$\tilde{W}^\mu(k) = \sum_{\lambda=1}^3 a_\lambda(k) \epsilon_{(\lambda)}^\mu(k) + b(k) k^\mu$$

Inserendo tale espressione nelle equazioni del moto, e sfruttando l'ortogonalità dei vettori della base, otteniamo

$$(-k^2 + m^2) \left(\sum_{\lambda=1}^3 a_\lambda(k) \epsilon_{(\lambda)}^\nu(k) + b(k) k^\nu \right) + k^\nu k_\mu \left(\sum_{\lambda=1}^3 a_\lambda(k) \epsilon_{(\lambda)}^\mu(k) + b(k) k^\mu \right) = 0$$

$$(-k^2 + m^2) \left(\sum_{\lambda=1}^3 a_\lambda(k) \epsilon'_{(\lambda)}(k) + b(k) k^\mu \right) + k^\nu k^2 b(k) = 0$$

I singoli coefficienti devono annullarsi, pertanto

$$(-k^2 + m^2) a_\lambda(k) = 0$$

$$(-k^2 + m^2 + k^2) b(k) = m^2 b(k) = 0$$

Poichè m^2 per ipotesi è diversa da zero, è necessario che $b(k) = 0$. La prima equazione viceversa definisce il polo del propagatore a $k^2 = m^2$. Il campo vettoriale massivo ha pertanto 3 gradi di libertà indipendenti, corrispondenti alle polarizzazioni $\epsilon_{(i)}^\mu$, $i = 1, 2, 3$. È facile mostrare che vale la relazione

$$\sum_{\lambda, \lambda'=0}^3 \epsilon_{(\lambda)}^\mu \epsilon'_{(\lambda')} g_{\lambda\lambda'} = g^{\mu\nu}$$

o in particolare

$$\sum_{\lambda=0}^3 g_{\lambda\lambda} \epsilon_{(\lambda)}^\mu \epsilon'_{(\lambda)} = g^{\mu\nu} \Rightarrow \sum_{\lambda=1}^3 \epsilon_{(\lambda)}^\mu \epsilon'_{(\lambda)} = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{m^2}$$

Il propagatore del campo W^μ si ottiene invertendo l'operatore d'onda

$$D_{\mu\nu}(k) = -i [(\square + m^2) g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu]$$

Nello spazio degli impulsi si ha

$$\tilde{D}_{\mu\nu}(k) = i [(k^2 - m^2) g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu]$$

Dobbiamo trovare un operatore $\tilde{G}_{\mu\nu}(k)$ tale che

$$D_{\mu\nu}(k) G^{\nu\rho}(k) = g_\mu^\rho$$

In generale un tensore del second'ordine si può espandere come

$$G_{\mu\nu}(k) = -i(a(k) g_{\mu\nu} + b(k) k_\mu k_\nu)$$

per cui

$$\begin{aligned} a(k)(k^2 - m^2) g_\rho^\mu - b(k) k^2 k^\mu k_\rho - b(k)(-k^2 + m^2) k^\mu k_\rho - a k^\mu k_\rho &= g_\rho^\mu \\ \Rightarrow a(k) &= \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\ -m^2 b(k) k^\mu k_\rho - \frac{k^\mu k_\rho}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = 0 &\Rightarrow b(k) = -\frac{1}{m^2} \frac{1}{k^2 - m^2} \end{aligned}$$

Infine

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\mu\nu}(k) &= \frac{-i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2} \right) \\ G_{\mu\nu}(x; m) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (-i) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2} \right) \end{aligned}$$

Questo propagatore ha un problema, infatti per $k \rightarrow \infty$ il termine $\frac{-i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{k^\mu k^\nu}{m^2}$ tende a una costante, e questo mina la rinormalizzabilità della teoria.

1.2.2 Simmetria di gauge spontaneamente rotta: il caso abeliano

Se partiamo con una teoria invariante di gauge sotto $O(2)$, con un potenziale che rompa la simmetria, abbiamo visto che il mixing tra il campo di Goldstone e il campo di gauge genera un termine di massa per quest'ultimo. Il passaggio al gauge unitario, però, dà luogo ad un termine di massa analogo a quello del caso della simmetria esplicitamente rotta, con gli stessi problemi annessi; sarà più fruttuoso passare ad un R_ξ -gauge generico, introducendo una opportuna funzione di gauge-fixing. Scriviamo i due gradi di libertà scalari come

$$\begin{aligned}\phi_1 &= v + \chi \\ \phi_2 &= \phi\end{aligned}$$

e il potenziale come

$$V(\chi, \phi) = \frac{\mu^2}{2} (\phi^2 + (\chi + v)^2) + \frac{\lambda}{4} (\phi^2 + (\chi + v)^2)^2$$

Il campo χ , o *campo di Higgs*, acquista una massa $m_\chi = -2\mu^2$, mentre ϕ rappresenta il campo di Goldstone, che scompare dallo spettro nell'eventuale passaggio al gauge unitario. Se $\tau = -i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è il generatore (antisimmetrico) della simmetria $O(2)$ nella rappresentazione fondamentale, il termine di derivata covariante si scrive:

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - ig\tau W_\mu$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_\mu \phi_1 + gW_\mu \phi_2 \\ \partial_\mu \phi_2 - gW_\mu \phi_1 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 + \frac{1}{2} g^2 \phi^2 W_\mu W^\mu + gW_\mu \phi_2 (\partial_\mu \chi) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} g^2 W_\mu W^\mu (\chi + v)^2 - gW_\mu (\partial^\mu \phi) (\chi + v)$$

Il campo di gauge acquista una massa $m_W^2 = g^2 v^2$, ma in particolare siamo interessati al termine di mixing tra il campo di Goldstone e il campo di gauge:

$$-gv(\partial_\mu \phi)W^\mu$$

Definiamo la funzione di gauge-fixing

$$f[W_\mu] = \partial_\mu W^\mu + gv\xi\phi$$

Come abbiamo visto, possiamo introdurre una funzione di gauge-fixing all'interno dell'integrale funzionale in questo modo:

$$\int \mathcal{D}(\phi, \chi) \mathcal{D}(W_\mu) e^{iS} \rightarrow \int \mathcal{D}(\phi, \chi) \mathcal{D}(W_\mu) \mathcal{D}(B) e^{iS} e^{-\frac{i}{2\xi} \int d^4x B^2} \delta(f[W_\mu] - B) \left| \frac{\delta f[W_\mu^\Omega(x)]}{\delta \alpha(x)} \right|$$

In questo modo aggiungiamo alla lagrangiana un termine di questa forma:

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\xi} (\partial_\mu W^\mu + gv\xi\phi)^2 = -\frac{1}{2\xi} (\partial_\mu W^\mu)^2 - \frac{1}{2}\xi g^2 v^2 \phi^2 - gv\phi(\partial_\mu W^\mu)$$

Integrando per parti, abbiamo

$$-\int d^4x gv\phi(\partial_\mu W^\mu) = \int d^4x gv(\partial_\mu \phi)W^\mu$$

dunque il termine di gauge-fixing cancella esattamente il mixing tra il campo di gauge e il campo di Goldstone. In compenso è nato un termine di massa fittizio per il campo ϕ : infatti $m_\phi^2 = \xi g^2 v^2$, ovvero dipende dal gauge.

Le regole di Feynman per il propagatore del campo di Higgs e per il campo di Goldstone sono quelle di un campo scalare di massa rispettivamente $m_\chi^2 = -2\mu^2$ e $m_\phi^2 = \xi g^2 v^2 = \xi m_W^2$:

$$\begin{aligned} \chi : \quad & \text{-----} & = \frac{i}{k^2 - m_\chi^2} \\ & \quad \quad \quad k \\ \phi : \quad & \text{\dots\dots\dots} & = \frac{i}{k^2 - \xi m_W^2} \\ & \quad \quad \quad k \end{aligned}$$

La lagrangiana di gauge diventa:

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_W^2 W_\mu W^\mu - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu W^\mu)^2 \equiv -\frac{1}{2}\partial_\mu W_\nu F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_W^2 W_\mu W^\mu - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu W^\mu)^2$$

Integrando per parti il primo e l'ultimo termine, si ha

$$\frac{1}{2}W_\nu \partial_\mu (\partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu) + \frac{1}{2}m_W^2 W_\mu W^\mu + \frac{1}{2\xi}W_\nu \partial^\nu \partial_\mu W^\mu \equiv \frac{1}{2}W_\mu \left((\square + m_W^2)g^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu \partial^\nu \right) W_\nu$$

In questo modo l'operatore d'onda da invertire è

$$D^{\mu\nu}(x; m_W, \xi) = -i \left((\square + m_W^2)g^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu \partial^\nu \right)$$

Nello spazio degli impulsi:

$$\tilde{D}^{\mu\nu}(k) = -i \left((-k^2 + m_W^2)g^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)k^\mu k^\nu \right)$$

Ancora una volta dobbiamo trovare un operatore $\tilde{G}^{\mu\nu}(k)$ tale che

$$\tilde{D}_{\mu\rho}(k)\tilde{G}^{\rho\nu}(k) = g_\mu^\nu$$

e lo cercheremo della forma

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\mu\nu}(k) &= i(a(k)g_{\mu\nu} + b(k)k_\mu k_\nu) \\ a(k)(-k^2 + m^2) &= 1 \Rightarrow a(k) = -\frac{1}{k^2 - m_W^2} \\ \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)b(k)k^2 k_\mu k^\nu + (-k^2 + m_W^2)b(k)k_\mu k^\nu - \frac{1}{k^2 - m_W^2} \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)k_\mu k^\nu &= 0 \\ \left(m_W^2 - \frac{k^2}{\xi}\right)b(k) - \frac{1}{k^2 - m_W^2} \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) &= 0 \\ \Rightarrow b(k) &= \frac{1}{k^2 - m_W^2} \frac{\xi - 1}{\xi m_W^2 - k^2} = \frac{1}{k^2 - m_W^2} \frac{1 - \xi}{k^2 - \xi m_W^2} \end{aligned}$$

Infine

$$G_{\mu\nu}(x; m_W) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m_W^2} \left(g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{1}{k^2 - \xi m_W^2} \right)$$

Vediamo l'effetto della varie scelte di gauge sul propagatore del bosone di Gauge:

- $\xi = 1$ (gauge di Feynman-t'Hooft):

$$\tilde{G}_{\mu\nu}(k) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 - m_W^2}$$

- $\xi = 0$ (gauge di Landau):

$$\tilde{G}_{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2 - m_W^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$$

- $\xi = \infty$ (gauge unitario):

$$\tilde{G}_{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2 - m_W^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m_W^2} \right)$$

Osserviamo che nel gauge di Landau il propagatore del campo di gauge ha un polo per $k^2 = 0$, ma questo viene rimosso nelle ampiezze dal contributo del campo del bosone di Goldstone, che ha anch'esso un polo in $k^2 = 0$ quando $\xi = 0$. Inoltre nel gauge unitario la massa del campo di Goldstone diventa infinita, ovvero il bosone di Goldstone si *disaccoppia*: diventando sempre più pesante, esso smette di far parte della dinamica.

Per quanto riguarda il determinante di Faddeev-Popov, sotto una rotazione di $O(2)$ con parametro $\alpha(x)$ si ha:

$$W^\mu \rightarrow W^\mu - \partial^\mu \alpha$$

$$\phi \rightarrow \phi - g\alpha(\chi + v)$$

dove ricordiamo che la costante di accoppiamento g è stata accorpata al parametro $\alpha(x)$. In questo modo

$$f[W_\mu^\Omega(x)] = \partial_\mu W^\mu + gv\xi\phi(x) - \square\alpha(x) - g^2v\xi(\chi(x) + v)\alpha(x)$$

Allora si ha

$$\frac{\delta f[W_\mu^\Omega(x)]}{\delta\alpha(y)} = -\square\delta^4(x-y) - (g^2v^2\xi + g^2v\xi\chi)\delta^4(x-y)$$

cioè il determinante di Faddeev-Popov dipende dai campi e non può essere fattorizzato, *neanche nel caso abeliano*. Questo ci costringe ad introdurre dei campi di ghost, mediante un integrale gaussiano fermionico:

$$\det \left| \frac{\delta f[W_\mu^\Omega(x)]}{\delta\alpha(y)} \right| = \det \left(-\square\delta^4(x-y) - (g^2v^2\xi + g^2v\xi\chi)\delta^4(x-y) \right) =$$

$$= \int \mathcal{D}\omega \mathcal{D}\omega^* \exp \left\{ i \int d^4x \omega^*(x) (\square + \xi m_W^2) \omega(x) \right\} \equiv \int \mathcal{D}\omega \mathcal{D}\omega^* \exp \left\{ - \int d^4x \omega^*(x) [-i(\square + \xi m_W^2)] \omega(x) \right\}$$

dove al solito abbiamo incluso solo il termine cinetico e di massa per i ghost. Il propagatore per il ghost si otterrà allora invertendo l'operatore

$$-i(\square + \xi m_W^2) \rightarrow i(k^2 - \xi m_W^2)$$

$$\omega(x) : \quad \dots\dots\dots = \frac{-i}{k^2 - \xi m_W^2}$$

Osserviamo che nel gauge unitario, anche i ghost si disaccoppiano.

1.2.3 Modello $U(1)$ spinoriale

In preparazione alla costruzione del modello standard, iniziamo con il considerare una lagrangiana spinoriale con simmetria di gauge $U(1)$. Lo spinore ψ è separato nelle due componenti left e right, per le quali imporre regole di trasformazione diverse sotto l'azione del gruppo. Si ha

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_L + \psi_R \\ \psi_L &= \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi \equiv \chi_- \psi \Rightarrow \bar{\psi}_L = \bar{\psi} \chi_+ \\ \psi_R &= \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi \equiv \chi_+ \psi \Rightarrow \bar{\psi}_R = \bar{\psi} \chi_-\end{aligned}$$

dove χ_{\pm} sono i due proiettori di chiralità. Le due componenti trasformano sotto $U(1)$ nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\psi_L &\rightarrow e^{i\alpha} \psi_L \\ \psi_R &\rightarrow \psi_R\end{aligned}$$

È facile vedere che nella lagrangiana non è ammesso un termine di massa per i fermioni, ovvero un termine della forma $m\bar{\psi}\psi$:

$$m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R)(\psi_L + \psi_R) = m\bar{\psi}_L\psi_R + m\bar{\psi}_R\psi_L$$

poichè $\chi_+\chi_- = 0$, dunque un termine di massa mescolerebbe componenti left e componenti right, e sotto una trasformazione di gauge si avrebbe

$$m\bar{\psi}_L\psi_R + m\bar{\psi}_R\psi_L \rightarrow e^{-i\alpha}m\bar{\psi}_L\psi_R + e^{i\alpha}m\bar{\psi}_R\psi_L$$

Viceversa il termine di derivata, grazie alla presenza di γ_{μ} , non mescola le componenti left e right e consente di inserire un termine cinetico:

$$i\bar{\psi} \not{\partial} \psi = i\bar{\psi}_L \not{\partial} \psi_L + i\bar{\psi}_R \not{\partial} \psi_R$$

Vediamo allora che la più generale lagrangiana per fermioni massless, invariante sotto $U(1)$, deve avere la forma

$$\mathcal{L}_f = i\bar{\psi}_L \not{D} \psi_L + i\bar{\psi}_R \not{\partial} \psi_R$$

dove $D_{\mu} = \partial_{\mu} - igW_{\mu}$, e il secondo addendo mantiene la derivata usuale perchè le componenti right non trasformano sotto $U(1)$: in altre parole le componenti right non interagiscono col campo di gauge W_{μ} . Per generare la massa dei fermioni utilizzeremo un accoppiamento yukawiano con un campo complesso Φ :

$$-\lambda_f(\bar{\psi}_L\psi_R\Phi + \bar{\psi}_R\psi_L\Phi^*)$$

dove Φ trasforma sotto $U(1)$ in questo modo:

$$\Phi \rightarrow e^{-i\alpha} \Phi$$

Scomponiamo il campo nelle sue componenti reali:

$$\Phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}$$

$$\Phi^* = \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}}$$

e inseriamole nell'accoppiamento yukawiano:

$$\begin{aligned} -\lambda_f(\bar{\psi}_L\psi_R\Phi + \bar{\psi}_R\psi_L\Phi^*) &= -\frac{\lambda_f}{\sqrt{2}}(\bar{\psi}_L\psi_R(\phi_1 + i\phi_2) + \bar{\psi}_R\psi_L(\phi_1 - i\phi_2)) = \\ &= -\frac{\lambda_f}{\sqrt{2}}\left(\bar{\psi}\frac{1+\gamma_5}{2}\psi(\phi_1 + i\phi_2) + \bar{\psi}\frac{1-\gamma_5}{2}\psi(\phi_1 - i\phi_2)\right) = -\frac{\lambda_f}{\sqrt{2}}(\bar{\psi}\psi\phi_1 + i\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi_2) \end{aligned}$$

La lagrangiana di gauge si scrive allora

$$\mathcal{L}_f = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi + g\bar{\psi}\gamma^\mu\frac{1-\gamma_5}{2}\psi W_\mu - \frac{\lambda_f}{\sqrt{2}}(\bar{\psi}\psi\phi_1 + i\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi_2)$$

Da questo capiamo subito che il campo ϕ_1 deve trasformare sotto parità come uno scalare, essendo accoppiato a $\bar{\psi}\psi$, mentre ϕ_2 deve trasformare come uno pseudoscalare, essendo accoppiato a $\bar{\psi}\gamma_5\psi$. Se vogliamo che il campo Φ acquisti VEV diverso da zero dobbiamo aggiungere anche un termine di potenziale che rompa la simmetria:

$$V(\phi_1, \phi_2) = \frac{\mu^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2$$

Per $\mu^2 < 0$ il potenziale $V(\phi_1, \phi_2)$ avrà minimo per $\phi_1^2 + \phi_2^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} = v^2$, e se decidiamo di assegnare VEV soltanto alla componente ϕ_1 , possiamo definire come al solito

$$\phi_1 = \chi + v$$

$$\phi_2 = \phi$$

dove χ è il campo di Higgs, e ϕ il campo di Goldstone. Effettuando lo shift $\phi_1 = \chi + v$ nel termine yukawiano otteniamo

$$\frac{\lambda_f}{\sqrt{2}}(\bar{\psi}\psi\phi_1 + i\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi_2) \rightarrow \frac{\lambda_f}{\sqrt{2}}(\bar{\psi}\psi\chi + v\bar{\psi}\psi + i\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi_2) = \frac{\lambda_f v}{\sqrt{2}}\bar{\psi}\psi + \frac{\lambda_f}{\sqrt{2}}\bar{\psi}\psi\chi + i\frac{\lambda_f}{\sqrt{2}}\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi_2$$

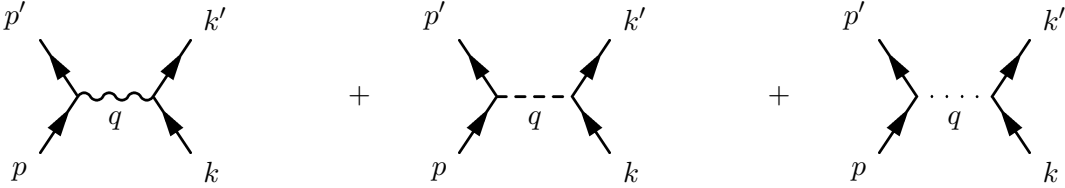
Il primo termine è il termine di massa per i fermioni, che acquistano quindi una massa $m_f = \frac{\lambda_f v}{\sqrt{2}}$, gli altri due termini rappresentano vertici di interazione tra i fermioni e i campi di Goldstone e di Higgs:

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \nearrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{array} \text{---} \text{---} \chi &= -i\frac{\lambda_f}{\sqrt{2}} \\ \begin{array}{c} \nearrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{array} \text{.....} \phi &= \frac{\lambda_f}{\sqrt{2}}\gamma_5 \end{aligned}$$

Inoltre nella lagrangiana di gauge è presente anche l'accoppiamento dei fermioni al campo di gauge:

$$= i g \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2}$$

Adesso abbiamo tutti gli strumenti per calcolare l'ampiezza $2f \rightarrow 2f$ ad ordine albero. I grafici che contribuiscono a questo processo sono tre:



Sebbene in un R_ξ -gauge il propagatore del campo di gauge che il propagatore del campo di Goldstone dipendano da ξ , mostreremo che alla fine il risultato non vi dipende, e che il campo di Goldstone cancella esattamente il contributo gauge-dipendente del campo di gauge. Poichè il propagatore del campo di Higgs non dipende da ξ , non lo considereremo.

Ricordiamo che il propagatore del bosone di gauge ha questa espressione:

$$G_{\mu\nu}(q) = \frac{-i}{q^2 - m_W^2} \left(g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2 - \xi m_W^2} \right)$$

Vogliamo scriverlo in maniera da isolare il contributo di gauge:

$$\begin{aligned} &= \frac{-i}{q^2 - m_W^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_W^2} + q_\mu q_\nu \left(\frac{1}{m_W^2} - (1 - \xi) \frac{1}{q^2 - \xi m_W^2} \right) \right) = \\ &= \frac{-i}{q^2 - m_W^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_W^2} + q_\mu q_\nu \left(\frac{q^2 - \xi m_W^2 - m_W^2 + \xi m_W^2}{m_W^2 (q^2 - \xi m_W^2)} \right) \right) = \\ &= \frac{-i}{q^2 - m_W^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_W^2} + \frac{q_\mu q_\nu}{m_W^2} \left(\frac{q^2 - m_W^2}{q^2 - \xi m_W^2} \right) \right) = \\ &= \frac{-i}{q^2 - m_W^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_W^2} \right) + \frac{-i}{q^2 - \xi m_W^2} \frac{q_\mu q_\nu}{m_W^2} \end{aligned}$$

Il diagramma con lo scambio del bosone di gauge quindi ha il valore:

$$(i g^2) \bar{u}(p') \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} u(p) \left[\frac{-i}{q^2 - m_W^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_W^2} \right) + \frac{-i}{q^2 - \xi m_W^2} \frac{q_\mu q_\nu}{m_W^2} \right] \bar{u}(k') \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} u(k)$$

dove $p' - p = q = k - k'$. Se consideriamo soltanto il secondo termine del propagatore, possiamo sfruttare il fatto che gli spinori u e \bar{u} sono soluzioni dell'equazione di Dirac:

$$\not{p}u(p) = m_f u(p)$$

$$\bar{u}(p') \not{p}' = m_f \bar{u}(p')$$

dunque

$$\bar{u}(p') \not{q} \frac{1-\gamma_5}{2} u(p) = \bar{u}(p') \left(\not{k}' \frac{1-\gamma_5}{2} - \frac{1+\gamma_5}{2} \not{k} \right) u(p) = m_f \bar{u}(p') \left(\frac{1-\gamma_5}{2} - \frac{1+\gamma_5}{2} \right) u(p) = -m_f \bar{u}(p') \gamma_5 u(p)$$

Per il fattore $\bar{u}(k') \not{q} \frac{1-\gamma_5}{2} u(k)$ otteniamo lo stesso risultato, ma con un segno scambiato perchè $q = k - k'$, infine il contributo gauge-dipendente si riduce a:

$$-(ig^2) \bar{u}(p') \frac{m_f^2}{m_W^2} \gamma_5 u(p) \left[\frac{-i}{q^2 - \xi m_W^2} \right] \bar{u}(k') \gamma_5 u(k)$$

se ricordiamo che $m_f = \frac{\lambda_f v}{\sqrt{2}}$ e che $g^2 v^2 = m_W^2$ possiamo riscrivere:

$$= \bar{u}(p') \frac{\lambda_f^2}{2} \gamma_5 u(p) \left[\frac{-i}{q^2 - \xi m_W^2} \right] \bar{u}(k') \gamma_5 u(k)$$

Se consideriamo adesso il termine derivante dallo scambio del bosone di Goldstone:

$$\frac{\lambda_f^2}{2} \bar{u}(p') \gamma_5 u(p) \frac{i}{q^2 - \xi m_W^2} \bar{u}(k') \gamma_5 u(k)$$

dunque i due contributi gauge-dipendenti si elidono esattamente, dando origine ad una ampiezza gauge-indipendente.

1.3 Il modello standard delle interazioni deboli

Il modello standard è una teoria messa a punto da Weinberg e Salam (Nobel: 1979) per descrivere le interazioni elettrodeboli tra le particelle elementari. Tale teoria si basa sulla rottura spontanea di una simmetria di gauge non abeliana: poichè sotto il gruppo di simmetria le componenti left e right dei fermioni vengono fatte trasformare diversamente (si dice che le interazioni deboli violano massimamente la parità), abbiamo visto che un termine di massa esplicito rompe la simmetria di gauge, dunque per dare massa alle particelle sfrutteremo il meccanismo di Higgs con un accoppiamento yukawiano opportuno. I problemi aperti del modello standard sono i seguenti:

- la particella di Higgs. Perchè deve esistere?
- i fermioni della materia non hanno tutti la stessa massa: già tra leptoni e quark, ma anche all'interno delle varie famiglie si osservano grandi differenze. Perchè esistono tre copie di particelle con stessi numeri quantici ma masse diverse? Poichè il valore di aspettazione sul vuoto del campo di Higgs è unico, all'interno del modello standard ad ogni particella dovrà essere assegnato un parametro libero λ_f , in modo che $m_f = \frac{\lambda_f v}{\sqrt{2}}$, che viene fissato in base al valore misurato (o calcolato teoricamente) delle masse.
- oltre a essere tutti diversi, i parametri λ_f riflettono i salti di ordini di grandezza che ci sono tra le masse. Perchè dobbiamo usare parametri così diversi?

Nonostante queste domande senza risposta, il modello standard resta comunque la migliore spiegazione per le interazioni deboli, anche dal punto di vista dell'introdurre il minor numero possibile di oggetti ignoti aggiuntivi.

1.3.1 La lagrangiana di Fermi

L'interazione debole fu modellizzata per la prima volta da Fermi, basandosi sul decadimento del neutrone, in termini di una interazione corrente-corrente, e fu generalizzata verso la fine degli anni 50 in modo da contenere sia correnti adroniche che correnti leptoniche, e la violazione di parità. L'hamiltoniana di interazione debole può quindi essere scritta come

$$H_W = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \int d^3x J^\mu(x) J_\mu^\dagger(x) + h.c.$$

dove

$$J_\mu = J_\mu^{lep} + J_\mu^{had}$$

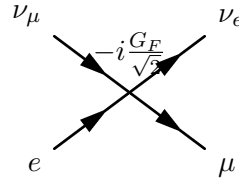
$$J_\mu^{lep} = \bar{e}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)\nu_e + \bar{\mu}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)\nu_\mu + \bar{\tau}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)\nu_\tau$$

$$J_\mu^{had} = \bar{p}\gamma^\mu(c_V - c_A\gamma_5)n + h.c.$$

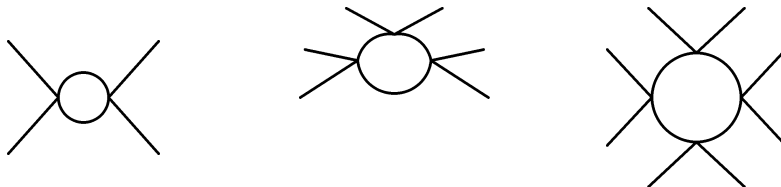
dove $c_V = 1$ e $c_A = 1.25$ sono dei coefficienti che tengono conto che protone e neutrone non sono particelle elementari ma composte, e G_F è la costante di Fermi:

$$G_F = 1.16 \cdot 10^{-5} GeV^{-2}$$

. Con questo tipo di interazione si spiegarono i dati sperimentali disponibili all'epoca. La teoria di Fermi prevede una interazione di tipo puntiforme, o di contatto:



Consideriamo lo scattering $\nu_\mu e \rightarrow \nu_e \mu$: se assegniamo ai leptoni negativi e ai loro corrispondenti neutrini numero leptonico +1, il numero leptonico è conservato nel processo, e il vertice di interazione è $-i\frac{G_F}{\sqrt{2}}$. Avendo dimensione di massa -2, la costante di Fermi rende la teoria non rinormalizzabile per power counting, infatti l'ampiezza a 4 fermioni riceve divergenze da loop di questo tipo:



La divergenza dovuta al primo diagramma può essere riassorbita nel coefficiente del termine $(\bar{\psi}\psi)^2$ che è già presente nella lagrangiana, ma le divergenze degli altri due diagrammi avrebbero bisogno di controtermini della forma $(\bar{\psi}\psi)^3$ e $(\bar{\psi}\psi)^4$ che non sono già presenti nella lagrangiana e quindi vanno introdotti a mano. Si può mostrare che per teorie in cui la costante di accoppiamento ha dimensione di massa negativa (come la

teoria di Fermi) il numero di controtermini da introdurre ad ogni ordine prolifera fino a diventare infinito, richiedendo un numero infinito di parametri liberi da introdurre, e quindi spogliando la teoria da ogni sua caratteristica di predicibilità. Teorie di questo tipo vengono dette *non rinormalizzabili*. Tuttavia non è detto che una teoria non rinormalizzabile sia necessariamente una teoria inutile: la teoria di Fermi, infatti, fornisce comunque predizioni sensate, a patto che le energie coinvolte nei processi siano inferiori ad una certa soglia, si parla in questo caso di *teorie effettive*.

1.3.2 Non unitarietà della teoria di Fermi

Accanto alla non rinormalizzabilità, un problema collegato è quello della non unitarietà. Infatti, le ampiezze di scattering derivano dagli elementi di matrice della matrice S tra gli stati iniziali e finali, e poichè la matrice S è unitaria, ovvero soddisfa a $S^\dagger S = I$, anche i suoi elementi di matrice dovranno soddisfare a ben precise condizioni. Quando in una teoria le ampiezze di scattering sono tali da portare ad una matrice S per cui non valga $S^\dagger S = I$, si dice che la teoria *viola l'unitarietà*.

In generale, scriviamo S come

$$S = I + iT$$

In questo modo la condizione di unitarietà diventa

$$I - i(T^\dagger - T) + T^\dagger T = I \Rightarrow T^\dagger T = i(T^\dagger - T)$$

Definiamo l'elemento di matrice invariante tra due stati $|a\rangle$ e $|b\rangle$ come:

$$\langle a|T|b\rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p_a - p_b) \mathcal{M}_{ab}$$

$$\langle a|T^\dagger T|b\rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(p_a - p_b) (\mathcal{M}_{ab}^* - \mathcal{M}_{ab}) = 2(2\pi)^4 \delta^4(p_a - p_b) \text{Im}[\mathcal{M}_{ab}]$$

Introducendo una completezza:

$$I = \sum_f \prod_i \int \frac{d^3 p_f^i}{(2\pi)^3 2E_f^i} |f\rangle \langle f|$$

dove i è l'indice della i -esima particella e f è un possibile stato intermedio, si ha:

$$\langle a|T^\dagger T|b\rangle = \sum_f \prod_i \int \frac{d^3 p_f^i}{(2\pi)^3 2E_f^i} (2\pi)^4 \delta^4(p_a - p_f) \mathcal{M}_{af}^* (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_b) \mathcal{M}_{fb}$$

Nel caso particolare in cui $|a\rangle \equiv |b\rangle$, si ha

$$= \langle a|T^\dagger T|a\rangle = (2\pi)^4 \delta^4(0) \sum_f \prod_i \int \frac{d^3 p_f^i}{(2\pi)^3 2E_f^i} |\mathcal{M}_{af}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_a)$$

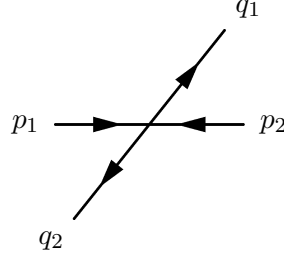
$$i\langle a|T^\dagger - T|b\rangle = 2(2\pi)^4 \delta^4(0) \text{Im}[\mathcal{M}_{ab}]$$

d quindi

$$\sum_f \prod_i \int \frac{d^3 p_f^i}{(2\pi)^3 2E_f^i} |\mathcal{M}_{af}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_a) = 2\text{Im}[\mathcal{M}_{ab}]$$

Questo risultato è il contenuto del teorema ottico: la sezione d'urto totale di scattering verso tutti i possibili stati finali è proporzionale alla parte immaginaria dell'ampiezza di scattering in avanti.

Consideriamo adesso uno scattering elastico di due particelle identiche:



A livello cinematico questo processo è descrivibile mediante due sole variabili di Mandelstam, ad esempio s e t :

$$s = (p_1 + p_2)^2$$

$$t = (p_1 - q_1)^2$$

Se θ è l'angolo tra l'impulso \vec{p}_1 e l'impulso \vec{q}_1 , a grandi energie (o per particelle senza massa) la relazione tra s e t è data da:

$$t = -\frac{s}{2}(1 - \cos \theta)$$

Dunque, una volta fissata l'energia del centro di massa, l'ampiezza dipenderà solo da $\cos \theta$. Questo ci permette di espandere l'elemento \mathcal{M} sulla base dei polinomi di Legendre:

$$P_l(z) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dz^l} (z^2 - 1)^l$$

con la condizione di normalizzazione $P_l(1) = 1$. I polinomi di Legendre soddisfano alla condizione di ortogonalità

$$\int_{-1}^1 dz P_j(z) P_l(z) = \frac{2\delta_{jl}}{2j+1}$$

Espandiamo l'ampiezza in termini dei polinomi di Legendre:

$$\mathcal{M}(s, \cos \theta) = 16\pi \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) a_j(s) P_j(\cos \theta)$$

La relazione inversa è

$$a_j(s) = \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^1 d\cos \theta \mathcal{M}(s, \cos \theta) P_j(\cos \theta)$$

Se inseriamo questo sviluppo nella relazione di unitarietà, otteniamo:

$$\int \frac{d^3 q_f^1 d^3 q_f^2}{(2\pi)^3 2E_f^1 (2\pi)^3 2E_f^2} \left(16\pi \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) a_j^*(s) P_j(\cos \theta_f) \right) \left(16\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(s) P_l(\cos \theta_f) \right) (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_{i=1}^2 p_i - q_i \right) =$$

$$= 2 \left(16\pi \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) \text{Im}[a_j(s)] P_j(\cos \theta) \right)$$

dove $a_j(s)$ è l'ampiezza parziale per lo scattering $a \rightarrow f$. Possiamo usare la delta di conservazione dell'impulso spaziale per eliminare l'integrale su una particella, ad esempio q_2 :

$$\frac{1}{16\pi^2} \int \frac{d^3 q_f^1}{E_f^1 E_f^2} \left(16\pi \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) a_j^*(s) P_j(\cos \theta_f) \right) \left(16\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(s) P_l(\cos \theta_f) \right) \delta(E_1 + E_2 - E_f^1 - E_f^2)$$

Le due particelle sono identiche, dunque nel sistema del centro di massa la loro energia è la stessa:

$$E_f^1 = E_f^2 = E_f = \sqrt{m^2 + \vec{q}_f^2}$$

pertanto vale la relazione

$$E_f dE_f = q_f dq_f$$

Inoltre, se le masse sono trascurabili rispetto all'energia, $E_f \sim q_f$ e si ha

$$16 \int d\Omega_f dE_f \left(\sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) a_j^*(s) P_j(\cos \theta_f) \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(s) P_l(\cos \theta_f) \right) \delta(E_1 + E_2 - E_f^1 - E_f^2)$$

Ma $E_1 + E_2 = \sqrt{s}$ dunque $\delta(\sqrt{s} - 2E_f) = \frac{1}{2} \delta\left(\frac{\sqrt{s}}{2} - E_f\right)$, e l'ultima integrazione fissa E_f al valore $\frac{\sqrt{s}}{2}$:

$$8 \int d\Omega_f \left(\sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) a_j^*(s) P_j(\cos \theta_f) \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(s) P_l(\cos \theta_f) \right)$$

Resta l'integrazione sull'angolo solido: poichè lo scattering avviene su un piano, $d\Omega_f = 2\pi d \cos \theta_f$, e per la relazione di ortogonalità tra i polinomi di Legendre:

$$\begin{aligned} 16\pi \int_{-1}^1 d \cos \theta_f \left(\sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) a_j^*(s) P_j(\cos \theta_f) \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(s) P_l(\cos \theta_f) \right) = \\ = 32\pi \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) |a_j^*(s)|^2 \end{aligned}$$

Dunque

$$32\pi \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) |a_j^*(s)|^2 = 2 \left(16\pi \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) \text{Im}[a_j(s)] P_j(\cos \theta) \right)$$

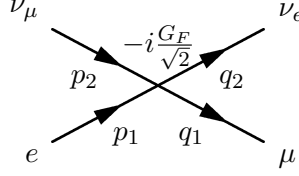
cioè tra le ampiezze parziali e le loro parti immaginarie deve sussistere la relazione

$$|a_j(s)|^2 = \text{Im}[a_j(s)]$$

ma questo è possibile solo se $|a_j(s)| < 1$.

Consideriamo ora uno scattering $2f \rightarrow 2f$ nella teoria di Fermi, ad esempio

$$e(p_1) + \nu_\mu(p_2) \rightarrow \mu(q_1) + \nu_\mu(q_2)$$



L'ampiezza per tale diagramma è:

$$\mathcal{M} = -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} (\bar{u}(q_2) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p_1)) (\bar{u}(q_1) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(p_2))$$

Trascurando le masse, si ha:

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}(s, t)}|^2 &= \frac{G_F^2}{2} Tr [\not{q}_2 \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \not{p}_1 \gamma^\nu (1 - \gamma_5)] Tr [\not{q}_1 \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \not{p}_2 \gamma_\nu (1 - \gamma_5)] = \\ &= 2G_F^2 Tr [\not{q}_2 \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \not{p}_1 \gamma^\nu] Tr [\not{q}_1 \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \not{p}_2 \gamma_\nu] = \\ &= 32G_F^2 \left(q_2^\mu p_1^\nu + q_2^\nu p_1^\mu - g^{\mu\nu} (q_2 \cdot p_1) + i(q_2)_\alpha (p_1)_\beta \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} \right) \cdot \\ &\cdot ((q_1)_\mu (p_2)_\nu + (q_1)_\nu (p_2)_\mu - g_{\mu\nu} (q_1 \cdot p_2) + i(q_1)^\rho (p_2)^\sigma \epsilon_{\rho\mu\sigma\nu}) = \end{aligned}$$

Ricordando che per il simbolo di Levi-Civita vale

$$\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} \epsilon_{\rho\mu\sigma\nu} = -2(g_\rho^\alpha g_\sigma^\beta - g_\sigma^\alpha g_\rho^\beta)$$

si trova

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}(s, t)}|^2 &= 32G_F^2 (2(p_1 \cdot p_2)(q_1 \cdot q_2) + 2(p_2 \cdot q_2)(p_1 \cdot q_1) - 2((p_1 \cdot p_2)(q_1 \cdot q_2) - (p_2 \cdot q_2)(p_1 \cdot q_1))) = \\ &= 32G_F^2 s^2 \end{aligned}$$

poichè $s = (p_1 + p_2)^2 = (q_1 + q_2)^2 \sim 2(p_1 \cdot p_2) \sim 2(q_1 \cdot q_2)$. La media sugli spin in realtà non ha effetto perchè le polarizzazioni delle particelle coinvolte sono fissate, per cui $|\overline{\mathcal{M}(s, t)}| \equiv |\mathcal{M}(s, t)|$. Vediamo che l'espressione per l'ampiezza è indipendente da t , cioè da $\cos \theta$, dunque nell'espressione in onde parziali sopravviverà soltanto il termine $a_0(s)$:

$$|a_0(s)| = \frac{1}{32\pi} \left| \int_{-1}^1 d \cos \theta \mathcal{M}(s) \right| = \frac{|\mathcal{M}(s)|}{16\pi} = \frac{\sqrt{2}G_F s}{4\pi} = \frac{G_F s}{2\sqrt{2}\pi}$$

Il modulo dell'ampiezza $a_0(s)$ cresce linearmente con s , dunque la teoria di Fermi viola l'unitarietà per energie superiori ad una certa soglia:

$$s > \frac{2\sqrt{2}\pi}{G_F} \rightarrow E_{cm} > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{2}\pi}{G_F}} \sim 437 GeV$$

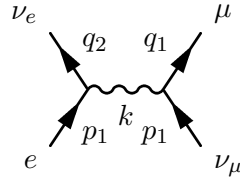
In realtà considerando tutti i processi possibili si scopre che la soglia di unitarietà per la teoria di Fermi è intorno ai $100 GeV$: sotto questa scala di energia la teoria può essere considerata valida e dà ottimi risultati.

1.3.3 Old IVB theory

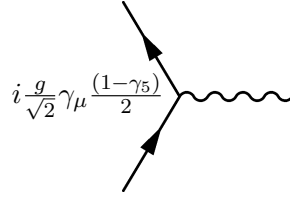
La generalizzazione più ovvia della teoria di Fermi si ottiene mettendo la corrente in interazione con un bosone vettoriale massivo, e carico:

$$\mathcal{L} = \frac{g}{2\sqrt{2}} J^{(-)\mu} W_\mu^{(+)} + h.c.$$

dove il fattore $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ è puramente convenzionale. La corrente $J_\mu^{(-)} = \sum_l \bar{l} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_l$ può creare un leptone carico negativamente oppure distruggerne uno carico positivamente, dunque affinché la lagrangiana sia scarica il campo $W_\mu^{(+)}$ dovrà creare un bosone W^+ carico positivamente oppure distruggere un bosone W^- carico negativamente. In questo formalismo lo scattering $e(p_1) + \nu_\mu(p_2) \rightarrow \mu(q_1) + \nu_e(q_2)$ è descritto dal seguente diagramma:



dove il vertice vale



Vediamo che per la conservazione del numero leptonico il processo avviene necessariamente nel canale u , dunque l'ampiezza sarà

$$\begin{aligned} & \frac{(ig)^2}{8} \bar{u}(q_2) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p_1) \frac{-i}{k^2 - m_W^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m_W^2} \right) \bar{u}(q_1) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p_2) = \\ & = \frac{(ig)^2}{8} \bar{u}(q_2) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p_1) \frac{-i}{u - m_W^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m_W^2} \right) \bar{u}(q_1) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p_2) \end{aligned}$$

L'accordo con la teoria di Fermi si recupera per piccoli k^2 , e da tale limite si ottiene anche la relazione tra la costante di Fermi e la costante di accoppiamento debole g :

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2}$$

La situazione rispetto alla teoria di Fermi è migliorata dal punto di vista della rinormalizzabilità, perchè adesso la costante di accoppiamento è adimensionale. Stavolta abbiamo due contributi, uno proporzionale a $g_{\mu\nu}$:

$$-i \frac{(ig)^2}{8} \frac{1}{u - m_W^2} \bar{u}(q_2) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p_1) \bar{u}(q_1) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(p_2)$$

analogo a quello precedente, e l'altro, dovuto al termine $k_\mu k_\nu$:

$$i \frac{(ig)^2}{8} \frac{1}{m_W^2(u - m_W^2)} \bar{u}(q_2) \not{k}(1 - \gamma_5) u(p_1) \bar{u}(q_1) \not{k}(1 - \gamma_5) u(p_2)$$

ma questo termine si annulla per le equazioni del moto, se consideriamo fermioni a massa nulla, dunque il modulo quadro dell'ampiezza è lo stesso del caso precedente, con la sostituzione $G_F \rightarrow \frac{\sqrt{2}g^2}{8} \frac{1}{u - m_W^2}$:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g^4 s^2}{(u - m_W^2)^2}$$

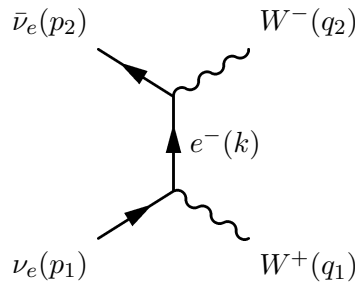
La sezione d'urto totale nel centro di massa a questo punto si ottiene come:

$$\begin{aligned} d\sigma_{tot} &= \frac{1}{4|\vec{p}|\sqrt{s}} \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - q_1 - q_2)}_{d\Phi} \frac{d^3 q_1 d^3 q_2}{(2\pi)^6 4(E')^2} \frac{1}{(2s_\nu + 1)(2s_\mu + 1)} |\mathcal{M}|^2 = \\ &= \frac{\delta(2E - 2E')}{(2\pi)^2 4|\vec{p}|\sqrt{s}} \frac{|\vec{q}| E' dE' d\Omega}{4(E')^2} \frac{1}{(2s_\nu + 1)(2s_\mu + 1)} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{(2\pi)^2 8s} \frac{1}{(2s_\nu + 1)(2s_\mu + 1)} |\mathcal{M}|^2 d\cos\theta = \\ &= \frac{1}{32\pi s} \frac{g^4 s^2}{(u - m_W^2)^2} d\cos\theta \frac{1}{(2s_\nu + 1)(2s_\mu + 1)} = \frac{1}{32\pi} \frac{g^4 s}{\left(\frac{s}{2} + \frac{s}{2} \cos\theta + m_W^2\right)^2} d\cos\theta \frac{1}{(2s_\nu + 1)(2s_\mu + 1)} = \\ &= \frac{1}{32\pi} \frac{g^4 s}{\frac{s^2}{4}(1 + \cos\theta + 2\frac{m_W^2}{s})^2} d\cos\theta \frac{1}{(2s_\nu + 1)(2s_\mu + 1)} = \frac{1}{8\pi} \frac{g^4}{s(1 + \cos\theta + 2\frac{m_W^2}{s})^2} d\cos\theta \frac{1}{(2s_\nu + 1)(2s_\mu + 1)} \end{aligned}$$

Integrando in $d\cos\theta$:

$$\begin{aligned} \sigma_{tot} &= \frac{1}{(2s_\nu + 1)(2s_\mu + 1)} \frac{g^4}{8s\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{(\cos\theta + 1 + 2\frac{2m_W^2}{s})^2} d\cos\theta = \\ &= \frac{1}{(2s_\nu + 1)(2s_\mu + 1)} \frac{g^4}{8s\pi} \left(\frac{1}{-1 + 1 + 2\frac{2m_W^2}{s}} - \frac{1}{1 + 1 + 2\frac{2m_W^2}{s}} \right) = \\ &= \frac{1}{(2s_\nu + 1)(2s_\mu + 1)} \frac{g^4}{16\pi} \left(\frac{1}{m_W^2} - \frac{1}{s + m_W^2} \right) = \frac{1}{(2s_\nu + 1)(2s_\mu + 1)} \frac{g^4}{16\pi} \left(\frac{s}{m_W^2(s + m_W^2)} \right) \end{aligned}$$

Dunque stavolta, se $s \rightarrow \infty$ la sezione d'urto tende ad un valore costante. Purtroppo questo risultato vale soltanto per questo particolare processo, infatti se consideriamo una ampiezza $2f \rightarrow 2W$, ad esempio $\nu\bar{\nu} \rightarrow W^+W^-$:



L'ampiezza per questo processo può essere fattorizzata come $\mathcal{M}^{\mu\nu}\epsilon_\mu^*(k)\epsilon_\nu^*(k')$ dove $\epsilon_\mu^*(k)$ è la polarizzazione corrispondente al bosone di gauge uscente. Il bosone di gauge ha tre gradi di libertà fisici, consideriamo quello longitudinale:

$$\epsilon_\mu^{(3)}(k) = \frac{1}{m_W} \left(|\vec{k}|, E \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \right)$$

Nel limite di $|\vec{k}| \gg m_W$, $E \simeq |\vec{k}|$ e i quadrivettori k^μ e $\epsilon_\mu^{(3)}$ tendono a coincidere, tanto più l'energia è grande rispetto alla massa; allora l'ampiezza del processo porterà un fattore $k^\mu k^\mu$, potenzialmente divergente. Si può mostrare che l'ampiezza per il processo diverge logaritmicamente con s , dunque la teoria con i bosoni vettoriali intermedi, pur essendo rinormalizzabile, viola l'unitarietà a grandi energie.

1.4 Costruzione del modello standard

1.4.1 L'algebra delle correnti

Abbiamo avuto modo di constatare che una teoria con un bosone vettoriale massivo fin dall'inizio ha dei problemi, o di rinormalizzabilità o di unitarietà. Pertanto per dare massa ai bosoni vettoriali del modello standard utilizzeremo il meccanismo di Higgs, rompendo una opportuna simmetria di gauge.

Prima di tutto, definiamo un doppietto leptonicò così costruito:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$$

dove e e ν_e rappresentano i campi dell'elettrone e del neutrino, dunque il doppietto contiene le componenti left-handed delle due particelle. Insieme al doppietto, definiamo anche un singoletto, che contiene le componenti right-handed:

$$R_\nu = \nu_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \nu$$

$$R_e = e_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} e$$

Questa scelta tiene conto del fatto che i neutrini right-handed, così come gli elettroni right-handed, sono fortemente inibiti nelle interazioni deboli. Tuttavia sono state osservate le cosiddette oscillazioni di neutrino, le quali implicherebbero che i neutrini abbiano una pur debole massa, e questo fa supporre che gli autostati di massa non siano gli stessi autostati che compaiono nelle interazioni deboli. In ogni caso, nel modello standard i neutrini vengono considerati massless.

Possiamo riscrivere le correnti leptoniche in termini del doppietto:

$$j_\mu^{(-)} = \bar{e}\gamma_\mu(1 - \gamma_5)\nu = 2\bar{e}_L\gamma_\mu\nu_L = \bar{L}\tau_-L$$

dove

$$\tau_- = \tau_1 - i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

e le τ_i sono le matrici di Pauli. Analogamente per $J_\mu^{(+)}$:

$$j_\mu^{(-)} = \bar{\nu}\gamma_\mu(1 - \gamma_5)e = 2\bar{\nu}_L\gamma_\mu e_L = 2\bar{L}\tau_+L$$

$$\tau_+ = \frac{\tau_1 + i\tau_2}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi riscritto le due correnti in termini delle matrici τ_\pm . Queste correnti avranno due rispettive cariche associate:

$$q^+ = \int d^3x j_0^{(+)} = \int d^3x L_L^\dagger \tau_+ L$$

$$q^- = \int d^3x j_0^{(-)} = \int d^3x L_L^\dagger \tau_- L$$

Il commutatore tra le due cariche è dato da:

$$[q^+, q^-] = \int d^3x d^3y \left[L_a^\dagger(\vec{x}) (\tau_+)_{ab} L_b(\vec{x}), L_c^\dagger(\vec{y}) (\tau_-)_{cd} L_d(\vec{y}) \right] =$$

Ricordando che $[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$ e che $\{\psi_a(\vec{x}, t), \psi_b^\dagger(\vec{y}, t)\} = \delta_{ab}\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} &= \int d^3x d^3y L_a^\dagger(\tau_+)_{ab} \left\{ L_b, L_c^\dagger(\tau_-)_{cd} L_d \right\} - \left\{ L_a^\dagger, L_c^\dagger(\tau_-)_{cd} L_d \right\} (\tau_+)_{ab} L_b = \\ &= \int d^3x L_a^\dagger(\tau_+)_{ab} (\tau_-)_{bd} L_d - L_c^\dagger(\tau_-)_{ca} (\tau_+)_{ab} L_b = 2 \int d^3x L_a^\dagger(\tau_3)_{ab} L_b = \\ &= 2 \int d^3x \bar{\nu}_L \gamma_0 \nu_L - \bar{e}_L \gamma_0 e_L \end{aligned}$$

Dunque se vogliamo chiudere la cosiddetta *algebra delle correnti* dobbiamo introdurre una terza corrente, neutra, definita come

$$j_3^\mu = \bar{L}\gamma^\mu\tau_3L$$

Possiamo inoltre riscrivere le correnti $j_\mu^{(+)}$ e $j_\mu^{(-)}$ in termini delle loro componenti reali:

$$j_\mu^{(+)} = j_\mu^1 + ij_\mu^2$$

$$j_\mu^{(-)} = J_\mu^1 - ij_\mu^2$$

In questo modo le cariche associate alle correnti $j_1^\mu, j_2^\mu, j_3^\mu$ soddisfano la stessa algebra delle matrici di Pauli τ_\pm, τ_3 . Definendo

$$J_1^\mu = \frac{j_1^\mu}{2}$$

$$J_2^\mu = \frac{j_2^\mu}{2}$$

$$J_3^\mu = \frac{j_3^\mu}{2}$$

si può verificare che $[Q_i, Q_j] = i\epsilon_{ijk}Q_k$, dove $Q_i = \frac{q_i}{2}$ sono le cariche associate alle nuove correnti. In altre parole le cariche Q_i chiudono un'algebra $SU(2)$.

1.4.2 La corrente elettromagnetica e la corrente di ipercarica

Vediamo se è possibile riscrivere in questo formalismo anche la corrente elettromagnetica. Per una particella di carica Q (misurata in unità di carica del protone) abbiamo

$$\begin{aligned} J_\mu^{(em)} &= Q\bar{e}\gamma_\mu e = Q[\bar{e}_L\gamma_\mu e_L + \bar{e}_R\gamma_\mu e_R] = Q\left[\bar{L}\gamma_\mu\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}L + R_e\gamma_\mu R\right] = \\ &= Q[\bar{L}\gamma_\mu\frac{1-\tau_3}{2}L + \bar{R}\gamma_\mu R] \end{aligned}$$

Per l'elettrone abbiamo $Q = -1$, dunque

$$J_\mu^{(em)} = -\frac{1}{2}\bar{L}\gamma_\mu L - \bar{R}\gamma_\mu R - \bar{L}\gamma_\mu\frac{\tau_3}{2}L$$

Riconosciamo nell'ultimo termine la corrente J_μ^3 . Definiamo adesso una nuova corrente, detta di *ipercarica*:

$$\frac{1}{2}J_\mu^Y = -\frac{1}{2}\bar{L}\gamma_\mu L - \bar{R}\gamma_\mu R$$

in modo che

$$J_\mu^{(em)} = \frac{1}{2}J_\mu^Y + J_\mu^3$$

La stessa relazione intercorre anche tra le cariche associate:

$$Q_{em} = \frac{1}{2}Q_Y + Q_3$$

La carica di ipercarica ha questa espressione:

$$Q_Y = -\int d^3x L^\dagger\gamma^\mu L + 2R^\dagger R$$

e si può verificare che commuta con le altre cariche:

$$[Q_Y, Q_i] = 0$$

In altre parole, le algebre descritte dalle Q_i e da Q_Y sono disgiunte. I risultati finora ottenuti ci dicono che se vogliamo descrivere le interazioni elettrodeboli nell'ambito della teoria dei gruppi, dobbiamo necessariamente affiancare alle correnti cariche anche una corrente neutra e una nuova corrente, l'ipercarica. Affinchè le cariche associate a queste correnti siano conservate, la lagrangiana dovrà essere simmetrica sotto le trasformazioni da esse generate: le tre cariche Q_i chiudono un'algebra $SU(2)_L$, mentre l'ipercarica può essere pensata come generatore di un gruppo $U(1)_Y$, dunque richiederemo che la lagrangiana sia invariante sotto il gruppo $SU(2) \otimes U(1)$.

Possiamo vedere in quale rappresentazione di questo gruppo stanno i campi L ed R ; per far questo, si prende il loro commutatore con le cariche del gruppo:

$$[L_a(\vec{y}), Q_Y] = -\int d^3x [L_a(\vec{y}), L_b^\dagger(\vec{x})L_b(\vec{x}) + 2R^\dagger(\vec{x})R(\vec{x})] = -\int d^3x [L_a(\vec{y}), L_b^\dagger(\vec{x})]L_b(\vec{x}) = -L_a(\vec{y})$$

cioè L_a sta nella rappresentazione -1 di $U(1)_Y$, oppure ha ipercarica $Q_Y(L) = -1$. Analogamente si trova

$$[R(\vec{y}), Q_Y] = -2$$

$$[L_a, Q_i] = \left(\frac{\tau_i}{2}\right)_{ab} L_b$$

$$[R, Q_i] = 0$$

da cui vediamo che L è un doppietto di $SU(2)$ (rappresentazione di dimensione 2 di $SU(2)$), mentre R è un singoletto (rappresentazione di dimensione 1 di $SU(2)$). In termini tecnici si scrive

$$L \in (2, -1)$$

$$R \in (1, -2)$$

Affinchè tutta la costruzione sia consistente, è lecito chiedersi se dalla relazione $Q_{(em)} = \frac{1}{2}Q_Y + Q_3$ derivino le giuste cariche elettriche per le particelle coinvolte:

$$Q_{(em)}(e_L) = \frac{1}{2}Q_Y(e_L) + Q_3(e_L) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

$$Q_{(em)}(e_R) = -1 - 0 = -1$$

$$Q_{(em)}(\nu_L) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

Possiamo riassumere in una tabella le caratteristiche delle particelle che partecipano alle interazioni deboli:

leptoni:	T	$\frac{\tau_3}{2}$	$Q_{(em)}$	Q_Y
ν_e	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
e_L	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-1
e_R	0	0	-1	-2

quark:	T	$\frac{\tau_3}{2}$	$Q_{(em)}$	Q_Y
u_L	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
d_L	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
u_R	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
d_R	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$

A questo punto, la costruzione della lagrangiana elettrodebole parte da un unico termine cinetico, senza termini di massa che come sappiamo rompono l'invarianza per trasformazioni di fase:

$$\mathcal{L} = \bar{L}i \not{\partial}L + \bar{R}i \not{\partial}R$$

Di questa lagrangiana poi si effettua il gauging, introducendo le opportune derivate covarianti:

$$D_L^\mu = \partial^\mu - ig\frac{\tau_i}{2}W_i^\mu + i\frac{g'}{2}Y^\mu$$

$$D_R^\mu = \partial^\mu + ig'Y^\mu$$

Osserviamo che la parte di derivata covariante per i campi right non contiene i generatori di $SU(2)$, e ha ipercarica doppia rispetto alle componenti left. Questo è dovuto al fatto che sotto le trasformazioni del gruppo di gauge i campi trasformano come

$$\begin{aligned} L &\rightarrow e^{-i\alpha(x)} e^{i\alpha_i(x)\tau_i} L \\ R &\rightarrow e^{-2i\alpha(x)} R \end{aligned}$$

La lagrangiana di gauge si riscrive allora

$$\mathcal{L} = \bar{L}i \not{\partial}L + \bar{R}i \not{\partial}R + g\bar{L}\gamma_\mu \frac{\tau_i}{2}LW_i^\mu - \frac{g'}{2}\bar{L}\gamma_\mu LY^\mu - g'\bar{R}\gamma_\mu RY^\mu$$

dove riconosciamo in $\bar{L}\gamma_\mu \frac{\tau_i}{2}L$ le correnti J_μ^i , e in $-\frac{1}{2}\bar{L}\gamma_\mu L - \bar{R}\gamma_\mu R$ la corrente di ipercarica $\frac{1}{2}J_\mu^Y$. Possiamo suddividere allora la lagrangiana di interazione in un termine di corrente carica e in un termine di corrente neutra:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{cc} &= g(J_\mu^1 W_1^\mu + J_\mu^2 W_2^\mu) \\ \mathcal{L}_{nc} &= gJ_\mu^3 W_3^\mu + g'\frac{J_\mu^Y}{2}Y^\mu \end{aligned}$$

È conveniente a questo punto definire una rotazione dei campi W_3^μ e Y^μ :

$$\begin{pmatrix} W_3 \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta Z + \sin\theta A \\ -\sin\theta Z + \cos\theta A \end{pmatrix}$$

In questo modo la lagrangiana neutra si riscrive:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{nc} &= g\cos\theta J_\mu^3 Z^\mu + g\sin\theta J_\mu^3 A^\mu - g'\sin\theta \frac{J_\mu^Y}{2} Z^\mu + g'\cos\theta \frac{J_\mu^Y}{2} A^\mu = \\ &= (g\sin\theta J_\mu^3 + g'\cos\theta \frac{J_\mu^Y}{2})A^\mu + (g\cos\theta J_\mu^3 - g'\sin\theta \frac{J_\mu^Y}{2})Z^\mu \end{aligned}$$

Ci piacerebbe identificare il campo A_μ con il campo del fotone, e quindi il termine $(g\sin\theta J_\mu^3 + g'\cos\theta \frac{J_\mu^Y}{2})$ con e volte la corrente elettromagnetica. Per far questo, è necessario che

$$g\sin\theta_W = g'\cos\theta_W = e$$

o equivalentemente

$$\tan\theta_W = \frac{g'}{g}$$

L'angolo θ_W per cui la relazione è verificata viene detto *angolo di Weinberg*. In questo modo, e ricordando che $J_Y^\mu = 2(J_{(em)}^\mu - J_3^\mu)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{nc} &= eJ_\mu^{(em)}A^\mu + (g\cos\theta_W J_\mu^3 - g'\sin\theta_W \frac{J_\mu^Y}{2})Z^\mu = eJ_\mu^{(em)}A^\mu + (g\cos\theta_W J_\mu^3 - g'\sin\theta_W (J_\mu^{(em)} - J_\mu^3))Z^\mu = \\ &= eJ_\mu^{(em)}A^\mu + \frac{g}{\cos\theta_W} (J_\mu^3 \cos^2\theta_W - \sin^2\theta_W (J_\mu^{(em)} - J_\mu^3))Z^\mu = eJ_\mu^{(em)}A^\mu + \frac{g}{\cos\theta_W} (J_\mu^3 - \sin^2\theta_W J_\mu^{(em)})Z^\mu \equiv \end{aligned}$$

$$\equiv eJ_\mu^{(em)} A^\mu + \frac{g}{\cos \theta_W} J_\mu^Z Z^\mu$$

dove abbiamo definito

$$J_\mu^Z = J_\mu^3 - \sin^2 \theta_W J_\mu^{(em)}$$

Per la lagrangiana carica, invece, dobbiamo riesprimere i campi W_1^μ e W_2^μ in termini dei campi fisici $W_\mu^{(+)}$ e $W_\mu^{(-)}$:

$$W_\mu^{(\pm)} = \frac{W_\mu^1 \pm iW_\mu^2}{\sqrt{2}}$$

$$J_\mu^{(\pm)} = \frac{J_\mu^1 \pm iJ_\mu^2}{2}$$

Osserviamo che a parte un fattore $\frac{1}{\sqrt{2}}$, questo è semplicemente un cambio di base unitario e quindi conserva il prodotto hermitiano tra i vettori

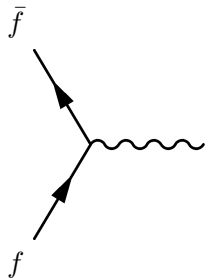
$$\mathcal{L}_{cc} = g [J_\mu^1 W_1^\mu + J_\mu^2 W_2^\mu] = \frac{g}{\sqrt{2}} [J_\mu^{(-)} W_{(+)}^\mu + J_\mu^{(+)} W_{(-)}^\mu]$$

Ricordiamo che secondo le nostre convenzioni, $J_\mu^{(-)}$ crea l'elettrone e $W_{(+)}^\mu$ crea il bosone positivo. Riassumiamo i risultati ottenuti per le due lagrangiane:

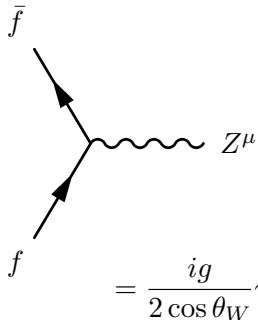
$$\mathcal{L}_{cc} = \frac{g}{\sqrt{2}} [J_\mu^{(-)} W_{(+)}^\mu + J_\mu^{(+)} W_{(-)}^\mu] \quad \left(= \frac{g}{2\sqrt{2}} [j_\mu^{(-)} W_{(+)}^\mu + j_\mu^{(+)} W_{(-)}^\mu] \right)$$

$$\mathcal{L}_{nc} = eJ_\mu^{(em)} A^\mu + \frac{g}{\cos \theta_W} J_\mu^Z Z^\mu$$

Ricordando che per un fermione generico $J_{(em)}^\mu = Q_f \bar{f} \gamma_\mu f$, da queste lagrangiane si possono ottenere i seguenti vertici di interazione:



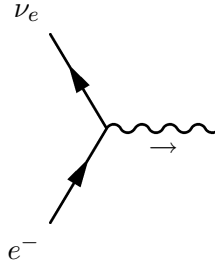
$$= \frac{\delta i(-Q_f) e J_\mu^{(em)} A^\mu}{\delta f \delta \bar{f} \delta A^\nu} = (-Q_f) (-ie\gamma_\nu)$$



$$= \frac{\delta \frac{ig}{\cos \theta_W} J_\mu^Z Z^\mu}{\delta f \delta \bar{f} \delta Z^\nu} = \frac{ig}{\cos \theta_W} \left(\frac{\tau_3}{2} \gamma_\nu \frac{1 - \gamma_5}{2} - Q_f \sin^2 \theta_W \gamma_\nu \right) =$$

$$= \frac{ig}{2 \cos \theta_W} \gamma_\nu \left(\frac{\tau_3}{2} - 2Q_f \sin^2 \theta_W - \frac{\tau_3}{2} \gamma_5 \right) \equiv \frac{ig}{2 \cos \theta_W} \gamma_\nu (c_V - c_A \gamma_5)$$

Per i neutrini $c_V = \frac{1}{2}$ e $c_A = \frac{1}{2}$, per gli elettroni invece $c_V = -\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W$ e $c_A = -\frac{1}{2}$.



$$W_\mu^{(-)} = \frac{\delta i \frac{g}{\sqrt{2}} \left[J_\mu^{(+)} W_{(-)}^\mu + J_\mu^{(-)} W_{(+)}^\mu \right]}{\delta e \delta \bar{\nu} \delta W_{(-)}^\mu} = i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2}$$

1.4.3 I termini cinetici

Introducendo la derivata covariante dobbiamo introdurre anche dei termini cinetici per i campi di gauge:

$$\mathcal{L}_k = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

dove

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + g f^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu Y_\nu - \partial_\nu Y_\mu$$

Nel caso di $SU(2)$, $f^{ijk} = \epsilon^{ijk}$. Questi oggetti danno origine a termini quadratici e a termini di self-interazione:

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} \left(2(\partial_\mu W_\nu^i)^2 + 2(\partial_\mu W_\nu^i)(\partial^\nu W_i^\mu) + g^2 \epsilon^{ijk} \epsilon^{ilm} W_\mu^j W_\nu^k W_l^\mu W_m^\nu + 4\epsilon^{ijk} \partial_\mu W_\nu^i W_j^\mu W_k^\nu \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} (\partial_\mu W_\nu^i)^2 - \frac{1}{2} (\partial_\mu W_\nu^i)(\partial^\nu W_i^\mu) - \frac{1}{4} g^2 \epsilon^{ijk} \epsilon^{ilm} W_\mu^j W_\nu^k W_l^\mu W_m^\nu - \epsilon^{ijk} \partial_\mu W_\nu^i W_j^\mu W_k^\nu$$

In realtà, scritta in questi termini, la lagrangiana non contiene i campi fisici, dobbiamo quindi effettuare le rotazioni

$$W^{(\pm)} = \frac{W_1 \pm iW_2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} W_1 = \frac{W^{(+)} + W^{(-)}}{\sqrt{2}} \\ W_2 = \frac{W^{(+)} - W^{(-)}}{i\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} W_3 \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix}$$

In questo modo il termine trilineare si trasforma in questo modo:

$$\epsilon^{312} \partial_\mu W_\nu^3 (W_1^\mu W_2^\nu) = -\frac{i}{2} \partial_\mu W_\nu^3 \left(W_{(+)}^\mu + W_{(-)}^\mu \right) \left(W_{(+)}^\nu - W_{(-)}^\nu \right)$$

$$\epsilon^{321} \partial_\mu W_\nu^3 (W_2^\mu W_1^\nu) = \frac{i}{2} \partial_\mu W_\nu^3 \left(W_{(+)}^\mu - W_{(-)}^\mu \right) \left(W_{(+)}^\nu + W_{(-)}^\nu \right)$$

$$\epsilon^{231} \partial_\mu W_\nu^2 (W_3^\mu W_1^\nu) = -\frac{i}{2} \left(\partial_\mu W_\nu^{(+)} - \partial_\mu W_\nu^{(-)} \right) W_3^\mu \left(W_{(+)}^\nu + W_{(-)}^\nu \right)$$

$$\epsilon^{213} \partial_\mu W_\nu^2 (W_1^\mu W_3^\nu) = \frac{i}{2} \left(\partial_\mu W_\nu^{(+)} - \partial_\mu W_\nu^{(-)} \right) W_3^\nu \left(W_{(+)}^\mu + W_{(-)}^\mu \right)$$

$$\begin{aligned}\epsilon^{123}\partial_\mu W_\nu^1(W_2^\mu W_3^\nu) &= -\frac{i}{2}\left(\partial_\mu W_\nu^{(+)} + \partial_\mu W_\nu^{(-)}\right)\left(W_{(+)}^\mu - W_{(-)}^\mu\right)W_3^\nu \\ \epsilon^{132}\partial_\mu W_\nu^1(W_3^\mu W_2^\nu) &= \frac{i}{2}\left(\partial_\mu W_\nu^{(+)} + \partial_\mu W_\nu^{(-)}\right)\left(W_{(+)}^\nu - W_{(-)}^\nu\right)W_3^\mu\end{aligned}$$

In questo modo i 6 termini si combinano per dare origine alle interazioni possibili (ovvero quelle a carica complessivamente nulla):

$$\mathcal{L}^{(3)} = ig\left(\partial_\mu W_\nu^3\right)\left(W_{(+)}^\mu W_{(-)}^\nu - W_{(+)}^\nu W_{(-)}^\mu\right) + ig\left(\partial_\mu W_\nu^{(+)}\right)\left(W_3^\nu W_-^\mu - W_3^\mu W_-^\nu\right) + ig\left(\partial_\mu W_\nu^{(-)}\right)\left(W_3^\mu W_+^\nu - W_3^\nu W_+^\mu\right)$$

Simbolicamente possiamo scrivere

$$\mathcal{L}^{(3)} = -ig\epsilon^{ABC}\left(\partial_\mu B_\nu^A\right)B_B^\mu B_C^\nu \quad (A, B, C = 1, 2, 3)$$

dove $B^1 = W^{(+)}$, $B^2 = W^{(-)}$, $B^3 = W^3$. Poichè $W_3 = \cos\theta_W Z + \sin\theta_W A$, possiamo specializzare immediatamente il risultato in questo modo:

$$-ig\cos\theta_W\epsilon^{ABC}\left(\partial_\mu Z_\nu^A\right)Z_B^\mu Z_C^\nu \quad \begin{cases} Z^1 = W^+ \\ Z^2 = W^- \\ Z^3 = Z \end{cases}$$

$$-ig\sin\theta_W\epsilon^{ABC}\left(\partial_\mu A_\nu^A\right)A_B^\mu A_C^\nu \equiv -ie\epsilon^{ABC}\left(\partial_\mu A_\nu^A\right)A_B^\mu A_C^\nu \quad \begin{cases} A^1 = W^+ \\ A^2 = W^- \\ A^3 = A \end{cases}$$

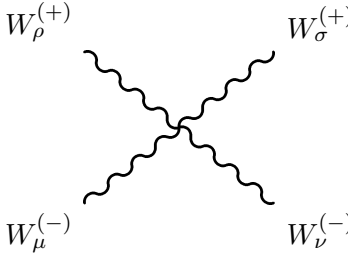
Questi termini danno origine ai vertici trilineari tra i campi di gauge, e si calcolano con un metodo analogo a quelli della QCD ; rispetto al caso dei gluoni, l'unica cosa che cambia è un fattore $-i$ a moltiplicare la lagrangiana di interazione, e un fattore -1 perchè il Cheng-Li definisce le derivate covarianti col segno opposto, dunque avremo semplicemente

$$\begin{aligned}&= ie[g_{\mu\nu}(k_1 - k_2)_\rho + g_{\nu\rho}(k_2 - k_3)_\mu + g_{\rho\mu}(k_3 - k_1)_\nu] \\ &= ig\cos\theta_W[g_{\mu\nu}(k_1 - k_2)_\rho + g_{\nu\rho}(k_2 - k_3)_\mu + g_{\rho\mu}(k_3 - k_1)_\nu]\end{aligned}$$

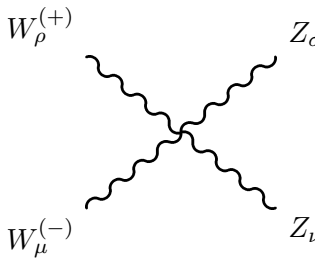
Per i quadrilineari:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(4)} &= -\frac{1}{4}g^2\epsilon^{ijk}\epsilon^{ilm}W_\mu^jW_\nu^kW_l^\mu W_m^\nu = -\frac{1}{4}g^2\left((W_\mu^l)^2 - (W_\mu^jW_j^\nu)(W_k^\mu W_\nu^k)\right) = \\
&= -\frac{1}{4}g^2\left((W_1^2 + W_2^2 + W_3^2)^2 + (W_1^\mu W_\nu^1 + W_2^\mu W_\nu^2 + W_3^\mu W_\nu^3)^2\right) = \\
&= -\frac{1}{4}g^2\left((2W_\mu^{(-)}W_{(+)}^\mu + W_3^2)^2 + (2W_\mu^{(-)}W_{(+)}^\nu + W_3^\mu W_\nu^3)^2\right) = \\
&= -\frac{1}{4}g^2\left(4W_\mu^{(-)}W_{(+)}^\mu W_\nu^{(-)}W_{(+)}^\nu + 4W_\mu^{(-)}W_{(+)}^\mu W_3^2 - 4(W_\mu^{(-)}W_{(-)}^\mu)(W_{(+)}^\nu W_\nu^{(+)}) - 4(W_{(-)}^\mu W_\mu^3)(W_{(+)}^\nu W_\nu^3)\right) = \\
&= -g^2\left(W_\mu^{(-)}W_\rho^{(+)}W_\nu^{(-)}W_\sigma^{(+)}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma})\right) - g^2\left(W_\mu^{(-)}W_\rho^{(+)}W_\nu^3W_\sigma^3(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma})\right) = \\
&= -g^2\left(W_\mu^{(-)}W_\rho^{(+)}W_\nu^{(-)}W_\sigma^{(+)}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma})\right) - g^2\cos^2\theta_W\left(W_\mu^{(-)}W_\rho^{(+)}Z_\nu Z_\sigma(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma})\right) - \\
&= -g^2\sin^2\theta_W\left(W_\mu^{(-)}W_\rho^{(+)}A_\nu A_\sigma(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma})\right) - g^2\cos\theta_W\sin\theta_W\left(W_\mu^{(-)}W_\rho^{(+)}(A_\nu Z_\sigma + A_\sigma Z_\nu)(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma})\right) \\
&= \mathcal{L}_{++--} + \mathcal{L}_{+-ZZ} + \mathcal{L}_{+-AA} + \mathcal{L}_{+-AZ}
\end{aligned}$$

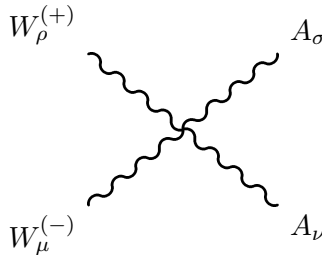
Questi termini generano i seguenti vertici:



$$= \frac{\delta i\mathcal{L}_{++--}}{\delta W_\mu^{(-)}\delta W_\nu^{(-)}\delta W_\rho^{(+)}\delta W_\sigma^{(+)}} = -ig^2(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - 2g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}) \equiv ig^2S_{\mu\nu,\rho\sigma}$$



$$= \frac{\delta i\mathcal{L}_{+-ZZ}}{\delta W_\mu^{(-)}\delta Z_\nu\delta W_\rho^{(+)}\delta Z_\sigma} = -ig^2\cos^2\theta_W S_{\mu\rho,\nu\sigma}$$



$$= \frac{\delta i\mathcal{L}_{+-AA}}{\delta W_\mu^{(-)}\delta A_\nu\delta W_\rho^{(+)}\delta A_\sigma} = -ie^2S_{\mu\rho,\nu\sigma}$$

$$= \frac{\delta i\mathcal{L}_{+-AZ}}{\delta W_\mu^{(-)} \delta A_\nu \delta W_\rho^{(+)} \delta Z_\sigma} = -ig^2 \sin \theta_W \cos \theta_W S_{\mu\rho,\nu\sigma}$$

1.4.4 Il meccanismo di Higgs

Allo stato attuale, la lagrangiana non contiene termini di massa per i campi di gauge, che sono quindi tutti e quattro massless. Dobbiamo trovare il modo di dare massa ai due bosoni di gauge carichi e allo Z , lasciando però il campo del fotone senza massa; dal punto di vista della teoria dei gruppi, questo si traduce nel richiedere che il gruppo di simmetria associato al campo A_μ , ovvero l' $U(1)$ elettromagnetico, non venga rotto. Non è sufficiente rompere completamente la simmetria $SU(2)$ e lasciare quella sotto l' $U(1)$ di ipercarica, perchè come abbiamo visto il campo Y^μ non coincide col campo A^μ , o più semplicemente il gruppo $U(1)$ di ipercarica e il gruppo $U(1)$ elettromagnetico pur essendo isomorfi, non coincidono. Il gruppo $SU(2) \otimes U(1)$ dipende da quattro parametri, ovvero sia ha quattro generatori, quattro direzioni indipendenti nell'algebra di Lie del gruppo. Questo ci fa capire che combinare linearmente i campi di gauge, cioè le “componenti” dei vettori dell'algebra, equivale a combinare linearmente la base dei generatori, e prendere come nuove componenti le combinazioni dei campi di gauge. Se consideriamo ad esempio τ_1 e τ_2 , i generatori dell' $SU(2)_L$ associati alle correnti cariche, essi sono completamente rotti, il che significa che a qualunque cambio di base li sottoponiamo (ad esempio passando alla base τ_+, τ_-) i due nuovi generatori saranno anch'essi completamente rotti. Il discorso cambia per il terzo generatore, τ_3 : sappiamo infatti che la corrente neutra associata allo Z non è J_3 ma una sua particolare combinazione con la corrente elettromagnetica, che a sua volta contiene τ_3 . Se rompessimo completamente τ_3 , quindi, acquisterebbe massa soltanto W_3 , di conseguenza ogni sua combinazione lineare col campo Y .

Se G è il gruppo totale di invarianza globale della lagrangiana, G_W il gruppo di invarianza locale (per noi $SU(2) \otimes U(1)$), e H il gruppo delle simmetrie del vuoto (cioè tutte le trasformazioni sotto cui il vuoto è invariante, tra cui la coniugazione di carica), romperemo tre generatori di G_W in modo che l'intersezione tra la simmetria residua e H sia proprio l' $U(1)$ elettromagnetico. Come abbiamo detto, $SU(2) \otimes U(1)$ è un gruppo a 4 parametri, quindi 4 dovranno essere i gradi di libertà del campo Φ che useremo per rompere la simmetria; resta da scegliere in quale rappresentazione dovrà vivere Φ : per quanto riguarda la parte di $SU(2)$, per semplicità considereremo Φ un doppietto complesso (4 parametri reali)

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda la rappresentazione di $U(1)_Y$, essa resta arbitraria finchè non decidiamo quali sarà la componente di Φ che acquisterà valore di aspettazione sul vuoto: poichè il vuoto è scarico e non degenerare, il VEV di un generico campo scalare carico sul vuoto è necessariamente nullo:

$$\langle 0 | \phi_{ch} | 0 \rangle = 0$$

infatti, se Q_{em} è il generatore delle trasformazioni dell' $U(1)$ elettromagnetico, una generica trasformazione $e^{i\theta Q_{em}}$ manda il vuoto in sè, e contemporaneamente ha una azione non banale sul campo ϕ_{ch} :

$$\langle 0|\phi_{ch}|0\rangle = \langle 0|e^{i\theta Q_{em}}e^{-i\theta Q_{em}}\phi_{ch}e^{i\theta Q_{em}}e^{-i\theta Q_{em}}|0\rangle = \langle 0|\phi_{ch}^\theta|0\rangle$$

Poichè in generale $\phi_{ch} \neq \phi_{ch}^\theta$, se i due campi hanno stesso VEV questo necessariamente è nullo: se vogliamo far acquistare VEV ad una componente di Φ , quindi, essa dovrà avere carica elettromagnetica nulla, in altre parole essere invariante sotto $U(1)_{em}$. Se scegliamo di assegnare VEV alle componenti inferiori, possiamo scrivere

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi \\ \phi_0 \end{pmatrix}$$

dove lo 0 sta ad indicare la carica elettrica. Questo fissa automaticamente l'ipercarica delle componenti inferiori grazie alla relazione $Q_Y = 2(Q_{em}^{down} - Q_3^{down}) = 1$; poichè le cariche di $SU(2)_L$ e quelle di $U(1)_Y$ commutano, le componenti superiori devono avere la stessa ipercarica di quelle inferiori, ovvero le due componenti appartengono alla stessa rappresentazione di $U(1)$. Questo a sua volta fissa la carica elettromagnetica delle componenti superiori:

$$Q_{em}^{up} = Q_3^{up} + \frac{1}{2}Q_Y = 1$$

dunque le componenti superiori hanno carica +1, e scriveremo infine

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{h + i\eta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

dove abbiamo espresso i due campi complesso ϕ^+ e ϕ^0 in termini delle loro componenti reali. In definitiva, il campo Φ appartiene alla rappresentazione $(2, 1)$ di $SU(2) \otimes U(1)$ (ricordiamo che $L \in (2, -1)$ e $R \in (1, -2)$). La più semplice lagrangiana invariante sotto $SU(2) \otimes U(1)$ e funzione del campo Φ si può scrivere come

$$\mathcal{L}_H = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2$$

Quando $\mu^2 < 0$, il potenziale presenta un minimo per $\Phi^\dagger \Phi = \frac{-\mu^2}{2\lambda} = \frac{v^2}{2}$. Abbiamo dunque una serie di minimi degeneri sulla ipersfera S_3 di raggio $\frac{v^2}{2}$; se parametrizziamo il minimo in modo che soltanto il campo h acquisti VEV, possiamo scrivere

$$\Phi_{min} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{H+v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

dove $\langle 0|H|0\rangle = 0$. In questo momento, se scegliamo come base per l'algebra di $SU(2) \otimes U(1)$ i generatori τ_1 , τ_2 , τ_3 e l'identità $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, risulterebbe a prima vista che tutti e quattro siano rotti, dato che la loro azione

su un qualunque vettore della forma $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$ restituisce un risultato diverso da zero. In realtà, in questo caso è possibile trovare una particolare combinazione dei generatori che annichila il vuoto: tale combinazione è $\frac{I + \tau_3}{2}$, e corrisponde alla carica elettromagnetica delle componenti del doppietto Φ . Tuttavia, considerando

che τ_3 è effettivamente rotto, e che in ogni caso τ_1 , τ_2 e τ_3 sono indipendenti, possiamo pensare di ottenere il generico campo Φ agendo su Φ_{min} con una trasformazione così fatta:

$$\Phi = \exp \left\{ i \frac{\tau_i \xi_i(x)}{v} \right\} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{H+v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

dove il fattore $\frac{1}{v}$ all'esponente è convenzionale. Questa rappresentazione però non è utile, in quanto ci fornisce tutte le possibili interazioni tra il campo di Higgs H e i campi di Goldstone $\xi_i(x)$ (*rappresentazione non lineare*); viceversa, se sviluppiamo per piccoli valori dei parametri, trascurando i termini del second'ordine:

$$\Phi \sim \left(1 + i \frac{\tau_i \xi_i}{v} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{H+v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + i \frac{\xi_3}{v} & i \frac{(\xi_1 - i\xi_2)}{v} \\ i \frac{(\xi_1 + i\xi_2)}{v} & 1 - i \frac{\xi_3}{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{H+v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i(\xi_1 - i\xi_2) \\ H + v - i\xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\xi_2 + i\xi_1}{\sqrt{2}} \\ \frac{H+v - i\xi_3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Confrontando questo risultato con la nostra definizione iniziale di Φ in termini delle sue componenti reali, possiamo identificare queste ultime con i bosoni di Goldstone:

$$\xi_2 \rightarrow \phi_1$$

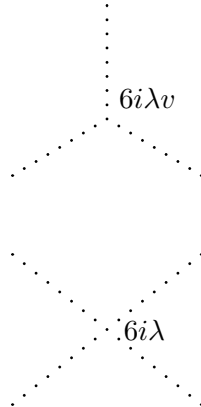
$$\xi_1 \rightarrow \phi_2$$

$$\xi_3 \rightarrow -\eta$$

Se esprimiamo il potenziale $V(\Phi)$ in termini del campo H , e ricordando che $v^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}$:

$$\begin{aligned} V(H) &= \frac{\mu^2}{2}(H+v)^2 + \frac{\lambda}{4}(H+v)^4 = \frac{\mu^2}{2}(H^2 + v^2 + 2Hv) + \frac{\lambda}{4}(H^4 + v^4 + 6H^2v^2 + 4v^3H + 4vH^3) = \\ &= -\frac{1}{4} \frac{\mu^2}{\lambda} + \frac{1}{2}(-2\mu^2)H^2 + v\lambda H^3 + \frac{\lambda}{4}H^4 \end{aligned}$$

Vediamo che come al solito il campo H acquista una massa $m_H = -2\mu^2 > 0$. Inoltre nascono i seguenti vertici trilineari e quadrilineari:



Infine, poichè la lagrangiana per l'Higgs è quella canonica per un campo scalare, il suo propagatore sarà

$$H : \dots\dots\dots = \frac{i}{k^2 - m_H^2}$$

La massa dell'Higgs è legata ad un parametro libero, λ , e ad un parametro misurabile, v , che come vedremo sarà legato alla costante di Fermi.

Promuoviamo adesso la simmetria globale $SU(2) \otimes U(1)$ della lagrangiana di Φ a simmetria di gauge, introducendo la derivata covariante:

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - ig \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i - i \frac{g'}{2} Y_\mu$$

Osserviamo che stavolta i segni delle derivate sono concordi, essendo l'iperparica di Φ positiva. Facciamo comparire i campi fisici $W^{(+)}$ e $W^{(-)}$:

$$\frac{\tau_i}{2} W_\mu^i = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tau^+ W_\mu^{(-)} + \tau^- W_\mu^{(+)}) + \frac{\tau_3}{2} W_\mu^3$$

dunque

$$D_\mu = \partial_\mu - \frac{ig}{\sqrt{2}} (\tau^+ W_\mu^{(-)} + \tau^- W_\mu^{(+)}) - ig \frac{\tau_3}{2} W_\mu^3 - \frac{ig'}{2} Y_\mu$$

Il termine cinetico allora diventa, nel gauge unitario:

$$\begin{aligned} (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) &\equiv \left| D^\mu \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{H+v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \left(\partial_\mu - \frac{ig}{\sqrt{2}} (\tau^+ W_\mu^{(-)} + \tau^- W_\mu^{(+)}) - ig \frac{\tau_3}{2} W_\mu^3 - \frac{ig'}{2} Y_\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{H+v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu H \end{pmatrix} - \frac{ig}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (H+v)W_\mu^{(-)} \\ -\frac{H+v}{2}(W_\mu^3 - \frac{g'}{g}Y_\mu) \end{pmatrix} \right|^2 \end{aligned}$$

Ricordiamo adesso la relazione che intercorre tra i campi W_3 ed Y , e i campi Z ed A :

$$\begin{pmatrix} W_3 \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_3 \\ Y \end{pmatrix}$$

In particolare $Z = \cos \theta_W W_3 - \sin \theta_W Y$, ma se ricordiamo anche il legame tra l'angolo di Weinberg e le costanti di accoppiamento g e g'

$$\frac{g'}{g} = \tan \theta_W$$

ci accorgiamo che la combinazione nella derivata covariante riproduce esattamente il campo Z :

$$\frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu H \end{pmatrix} + \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -g(H+v)W_\mu^{(-)} \\ \frac{H+v}{\sqrt{2}}(gW_\mu^3 - g'Y_\mu) \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu H \end{pmatrix} + \frac{ig}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -(H+v)W_\mu^{(-)} \\ \frac{1}{\cos \theta_W} \frac{H+v}{\sqrt{2}} Z_\mu \end{pmatrix} \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu H \end{pmatrix} - \frac{ig}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -vW_\mu^{(-)} \\ \frac{v}{\sqrt{2}\cos\theta_W} Z_\mu \end{pmatrix} \left(1 + \frac{H}{v}\right) \right|^2 = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu H \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}gvW_\mu^{(-)} \\ \frac{gv}{\cos\theta_W} Z_\mu \end{pmatrix} \left(1 + \frac{H}{v}\right) \right|^2$$

Poichè la componente inferiore del secondo addendo è reale, il modulo quadro si ottiene immediatamente come

$$\mathcal{L}_H = \frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H) + \frac{1}{8} \left(1 + \frac{H}{v}\right)^2 \left(2g^2v^2W_\mu^{(-)}W_{(+)}^\mu + \frac{g^2v^2}{\cos^2\theta_W} Z_\mu Z^\mu\right)$$

Vediamo che i campi $W^{(\pm)}$ e, miracolosamente, anche lo Z , hanno acquistato una massa:

$$m_W^2 = \frac{g^2v^2}{4}$$

$$m_Z^2 = \frac{g^2v^2}{4\cos^2\theta_W} = \frac{m_W^2}{\cos^2\theta_W}$$

Ricordando la relazione che sussiste a basse energie tra la costante di Fermi e la costante di accoppiamento debole:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2} = \frac{4g^2}{8g^2v^2} = \frac{1}{2v^2}$$

dunque possiamo legare il valore di v ad una quantità misurabile:

$$v^2 = \frac{1}{\sqrt{2}G_f} \Rightarrow v \sim 246\text{GeV}$$

Inoltre, sapendo che $\frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$, e che $g \sin\theta_W = e$, possiamo trovare un'espressione anche per $\sin\theta_W$:

$$\begin{aligned} m_Z^2 &= \frac{g^2v^2}{4\cos^2\theta_W} = \frac{e^2v^2}{4\sin^2\theta_W\cos^2\theta_W} = \frac{e^2v^2}{\sin^2(2\theta_W)} \\ \Rightarrow \sin^2(2\theta_W) &= \frac{4\pi\alpha v^2}{M_Z^2} = \frac{4\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F m_Z^2} \\ \Rightarrow \sin^2\theta_W &= \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F m_Z^2}} \right] \end{aligned}$$

Dalle misure di LEP abbiamo una stima molto precisa della massa dello Z :

$$m_Z = 91.2\text{GeV}$$

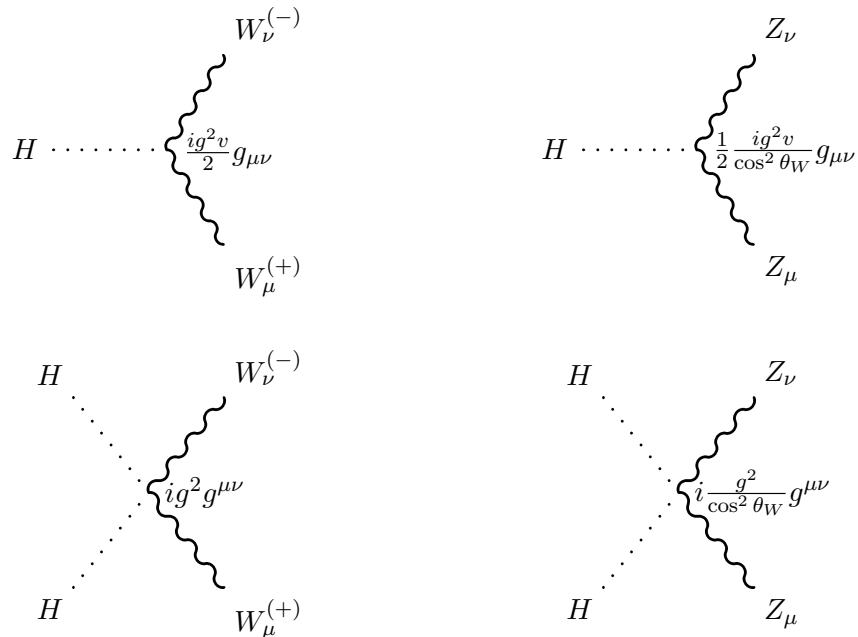
da cui si ottiene $\sin^2\theta_W \sim 0.22$, e quindi una stima per m_W :

$$m_W \sim 80.8\text{GeV}$$

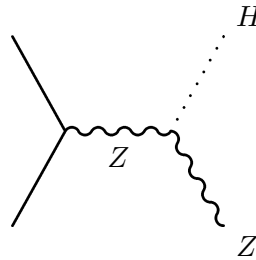
Scrivendo esplicitamente i vari termini della lagrangiana di Higgs:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H &= \frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H) + m_W^2 W_\mu^{(-)} W_{(+)}^\mu + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^2 + \\ &+ \frac{1}{2} H g^2 v W_\mu^{(-)} W_{(+)}^\mu + \frac{1}{4} H \frac{g^2 v}{\cos^2\theta_W} Z_\mu Z^\mu + \frac{1}{4} H^2 g^2 W_\mu^{(-)} W_{(+)}^\mu + \frac{1}{8} \frac{g^2}{\cos^2\theta_W} H^2 Z_\mu Z^\mu \end{aligned}$$

vediamo che compaiono dei nuovi vertici trilineari e quadrilineari:



L'accoppiamento ZZH è stato responsabile della parziale evidenza dell'Higgs a LEP2 (ovvero l'upgrade di LEP da 90GeV a 200GeV), attraverso il cosiddetto diagramma di "Higgs-straalung":



La statistica fu molto bassa, circa 4-5 eventi, ma si dedusse che se il processo era realmente avvenuto l'Higgs doveva avere massa intorno ai 114GeV , e tale valore costituiva anche un limite inferiore. TEVATRON, un acceleratore $p\bar{p}$ che funziona a 1TeV , ha escluso anche la finestra dai 160 ai 160GeV ; tuttavia, essendo un acceleratore adronico, presenta dei problemi dovuti al fondo di QCD, dunque non può andare a verificare direttamente i risultati di LEP.

1.4.5 Settore di Higgs in gauge non unitario

Abbiamo visto che non sempre il gauge unitario è la scelta ideale dal punto di vista della rinormalizzabilità, in quanto in questo gauge il propagatore del bosone mediatore ha un cattivo comportamento all'infinito. Se scegliamo di mantenere i bosoni di Goldstone, la lagrangiana del settore di Higgs assume questo aspetto

$$\mathcal{L}_H = \mathcal{L}_D - V(\Phi) + \mathcal{L}_{GF}$$

dove \mathcal{L}_{GF} è la lagrangiana di gauge-fixing, necessaria come vedremo per eliminare il mixing tra i campi di Goldstone e i bosoni di gauge. Se H, G_0, G^+ , sono tre opportuni campi (due scalari, scarichi, e uno complesso, carico) a valore di aspettazione nullo sul vuoto, possiamo scrivere il doppietto Φ come

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G^+ \\ \frac{H+iG_0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \Phi_0 + \Phi_1$$

Infine, il potenziale $V(\Phi)$ è sempre

$$V(\Phi) = \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2$$

La lagrangiana delle derivate covarianti adesso ha questo aspetto:

$$\mathcal{L}_D = \left(\partial_\mu \Phi^\dagger + \frac{i}{2} \Phi^\dagger (g\tau^i W_\mu^i + g' Q_Y Y_\mu) \right) \left(\partial_\mu \Phi - \frac{i}{2} (g\tau^i W_\mu^i - g' Q_Y Y_\mu) \Phi \right)$$

dove Q_Y è l'ipercarica del doppietto, che abbiamo lasciato per il momento non specificata.

Termini cubici

La lagrangiana delle derivate covarianti contiene contributi quadratici, cubici e quartici nei campi. La parte quadratica è il termine cinetico

$$\mathcal{L}_D^{(2)} = (\partial_\mu \Phi^\dagger)(\partial^\mu \Phi) = \partial_\mu G^- \partial^\mu G^+ + \frac{1}{2} (\partial_\mu H)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu G_0)^2$$

La parte cubica si ottiene accoppiando un termine di derivata a un termine contenente i bosoni di gauge:

$$\mathcal{L}_D^{(3)} = \frac{i}{2} \left[\Phi^\dagger (g\tau^i W_\mu^i + g' Q_Y Y_\mu) \partial^\mu \Phi - \partial^\mu \Phi^\dagger (g\tau^i W_\mu^i + g' Q_Y Y_\mu) \Phi \right] =$$

Sfruttando il fatto che $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$ e che $\partial_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi_1$:

$$= \frac{i}{2} \left[\Phi^\dagger (g\tau^i W_\mu^i + g' Q_Y Y_\mu) \partial^\mu \Phi_1 - \partial^\mu \Phi_1^\dagger (g\tau^i W_\mu^i + g' Q_Y Y_\mu) \Phi \right] =$$

Integrando per parti la lagrangiana, si ottiene

$$\begin{aligned} &= -\frac{i}{2} \left[\partial^\mu \Phi_1^\dagger (g\tau^i W_\mu^i + g' Q_Y Y_\mu) \Phi_1 + \Phi_1^\dagger (g\tau^i \partial^\mu W_\mu^i + g' Q_Y \partial^\mu Y_\mu) \partial^\mu \Phi_1 - \right. \\ &\quad \left. - \Phi_1^\dagger (g\tau^i W_\mu^i + g' Q_Y Y_\mu) \partial^\mu \Phi_1 - \Phi_1^\dagger (g\tau^i \partial^\mu W_\mu^i + g' Q_Y \partial^\mu Y_\mu) \Phi \right] = \\ &= -\frac{i}{2} \left[\partial^\mu \Phi_1^\dagger (g\tau^i W_\mu^i + g' Q_Y Y_\mu) \Phi_1 + \Phi_0^\dagger (g\tau^i \partial^\mu W_\mu^i + g' Q_Y \partial^\mu Y_\mu) \Phi_1 + \right. \\ &\quad \left. + \Phi_1^\dagger (g\tau^i \partial^\mu W_\mu^i + g' Q_Y \partial^\mu Y_\mu) \partial^\mu \Phi_1 - \Phi_1^\dagger (g\tau^i W_\mu^i - g' Q_Y Y_\mu) \partial^\mu \Phi_1 - \right. \\ &\quad \left. - \Phi_1^\dagger (g\tau^i \partial^\mu W_\mu^i + g' Q_Y \partial^\mu Y_\mu) \Phi_0 + \Phi_1^\dagger (g\tau^i \partial^\mu W_\mu^i + g' Q_Y \partial^\mu Y_\mu) \Phi_1 \right] \end{aligned}$$

I termini che danno fastidio sono quelli della forma $\Phi_0^\dagger (\partial_\mu W^\mu) \Phi_1$ e $\Phi_1^\dagger (\partial_\mu W^\mu) \Phi_0$, perchè danno origine a mixing quadratici della forma $v(\partial_\mu W^\mu)\phi$, indice del fatto che non stiamo lavorando nella base degli autostati. Introduciamo allora una lagrangiana di gauge-fixing di questa forma:

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi} (\partial_\mu W_\mu^i - \xi f_i(\Phi))^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu Y^\mu - \xi f(\Phi))^2$$

In questo modo si aggiungono dei termini della forma

$$-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu W_i^\mu)^2 - \frac{1}{2}\xi f_i^2(\Phi) + \underline{(\partial_\mu W_i^\mu)f_i(\Phi)} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu Y^\mu)^2 - \frac{1}{2}\xi f^2(\Phi) + \underline{(\partial_\mu Y^\mu)f(\Phi)}$$

I termini sottolineati sono quelli che fanno al caso nostro, ed eliminano il mixing a patto di scegliere opportunamente le funzioni $f_i(\Phi)$ e $f(\Phi)$:

$$\begin{aligned} \partial^\mu W_\mu^i \left(g \left(\Phi_1^\dagger \tau^i \Phi_0 - \Phi_0^\dagger \tau^i \Phi_1 \right) + \frac{2}{i} f_i(\Phi) \right) + \partial^\mu Y_\mu \left(g' Q_Y \left(\Phi_1^\dagger \Phi_0 - \Phi_0 \Phi_1 \right) + \frac{2}{i} f(\Phi) \right) \\ \Rightarrow \begin{cases} f_i(\Phi) = -\frac{i}{2} g \left(\Phi_1^\dagger \tau^i \Phi_0 - \Phi_0^\dagger \tau^i \Phi_1 \right) \\ f(\Phi) = -\frac{i}{2} g' Q_Y \left(\Phi_1^\dagger \Phi_0 - \Phi_0 \Phi_1 \right) \end{cases} \end{aligned}$$

L'introduzione del gauge fixing ha come conseguenza anche l'introduzione dei seguenti termini:

$$-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu W_i^\mu)^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu Y^\mu)^2 - \frac{\xi}{2} \left(-\frac{i}{2} g \left(\Phi_1^\dagger \tau^i \Phi_0 - \Phi_0^\dagger \tau^i \Phi_1 \right) \right)^2 - \frac{\xi}{2} \left(-\frac{i}{2} g' Q_Y \left(\Phi_1^\dagger \Phi_0 - \Phi_0 \Phi_1 \right) \right)^2$$

dove i primi due termini vanno a modificare propagatori dei bosoni di gauge, e gli ultimi due forniscono termini di massa (dipendenti dalla scelta di gauge) per i bosoni di Goldstone, infatti:

$$\begin{aligned} \Phi_1^\dagger \tau^1 \Phi_0 - \Phi_0^\dagger \tau^1 \Phi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} G^- & \frac{H-iG_0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G^+ \\ \frac{H+iG_0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{v}{\sqrt{2}} (G^- - G^+) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_1^\dagger \tau^2 \Phi_0 - \Phi_0^\dagger \tau^2 \Phi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} G^- & \frac{H-iG_0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G^+ \\ \frac{H+iG_0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \\ &= -i \frac{v}{\sqrt{2}} (G^+ + G^-) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_1^\dagger \tau^3 \Phi_0 - \Phi_0^\dagger \tau^3 \Phi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} G^- & \frac{H-iG_0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G^+ \\ \frac{H+iG_0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \\ &= ivG_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_1^\dagger \Phi_0 - \Phi_0 \Phi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} G^- & \frac{H-iG_0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} - \Phi_1^\dagger \Phi_0 - \Phi_0 \Phi_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G^+ \\ \frac{H+iG_0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{v}{2} (H - iG_0) - \frac{v}{2} (H + iG_0) = -ivG_0 \end{aligned}$$

Da cui

$$\begin{aligned} &-\frac{\xi}{2} \left(-\frac{i}{2} g \left(\Phi_1^\dagger \tau^i \Phi_0 - \Phi_0^\dagger \tau^i \Phi_1 \right) \right)^2 - \frac{\xi}{2} \left(-\frac{i}{2} g' Q_Y \left(\Phi_1^\dagger \Phi_0 - \Phi_0 \Phi_1 \right) \right)^2 = \\ &= \frac{\xi}{2} \left\{ \frac{g^2}{8} v^2 [((G^-)^2 + (G^+)^2 - 2G^-G^+) - ((G^-)^2 + (G^+)^2 + 2G^-G^+) - 2G_0^2] + \frac{(g')^2}{4} v^2 G_0^2 \right\} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{\xi (g^2 + (g')^2) v^2}{4} \right) G_0^2 - \frac{\xi g^2 v^2}{4} G^- G^+$$

da cui si vede che i campi di Goldstone hanno acquistato una massa $m_{G_0}^2 = \xi m_Z^2$ e $m_{G^\pm}^2 = \xi m_W^2$. I propagatori dei campi di Goldstone, essendo essi campi scalari, saranno

$$G_0 : \quad \text{.....} \quad = \frac{i}{k^2 - \xi m_Z^2}$$

k

$$G^\pm : \quad \text{.....} \quad = \frac{i}{k^2 - \xi m_W^2}$$

k

Mentre per i rispettivi bosoni vettori i propagatori saranno modificati dal gauge-fixing nel solito modo:

$$Z : \quad \text{~~~~~} \quad = \frac{-i}{k^2 - \xi m_Z^2} \left(g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \xi m_Z^2} \right)$$

k

$$W^{(\pm)} : \quad \text{~~~~~} \quad = \frac{-i}{k^2 - \xi m_W^2} \left(g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \xi m_W^2} \right)$$

k

Infine, sappiamo che la procedura di gauge-fixing comporta l'introduzione nella teoria dei ghost, uno per ogni campo di gauge (compreso quello del fotone), e si può mostrare che i rispettivi propagatori sono:

$$\omega_0 : \quad \text{.....} \quad = \frac{-i}{k^2 - \xi m_Z^2}$$

k

$$\omega_\pm : \quad \text{.....} \quad = \frac{-i}{k^2 - \xi m_W^2}$$

k

$$\omega_\gamma : \dots\dots\dots = \frac{-i}{k^2}$$

Una volta che abbiamo eliminato il mixing dalla lagrangiana, rimaniamo con questi termini:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(3)} = & -\frac{i}{2} \left[\partial^\mu \Phi_1^\dagger (g\tau^i W_\mu^i + g' Q_Y Y_\mu) \Phi_1 + \Phi_1^\dagger (g\tau^i \partial^\mu W_\mu^i + g' Q_Y \partial^\mu Y_\mu) \partial^\mu \Phi_1 - \right. \\ & \left. - \Phi_1^\dagger (g\tau^i W_\mu^i - g' Q_Y Y_\mu) \partial^\mu \Phi_1 + \Phi_1^\dagger (g\tau^i \partial^\mu W_\mu^i + g' Q_Y \partial^\mu Y_\mu) \Phi_1 \right] \end{aligned}$$

1.4.6 Settore di Yukawa: massa ai leptoni

In questo momento, nella teoria le uniche particelle ad avere massa sono i tre bosoni di gauge $W^{(\pm)}$, Z , mentre rimangono massless il campo del fotone e i fermioni, dato che per l'invarianza di gauge non è consentito un termine $\bar{\psi}\psi$. Per dare massa ai fermioni sfrutteremo sempre il meccanismo di Higgs, ma stavolta utilizzando un accoppiamento di tipo yukawiano. Con gli strumenti che già abbiamo a disposizione, un doppietto $L \in (2, -1)$, un singoletto $R \in (1, -2)$ e un doppietto $\Phi \in (2, 1)$, possiamo costruire ed aggiungere alla lagrangiana il seguente settore yukawiano:

$$\mathcal{L}_Y = -g_e (\bar{L}\Phi R + h.c.)$$

Si può verificare immediatamente che l'oggetto così costruito è invariante sotto una trasformazione di $SU(2) \otimes U(1)$, infatti:

$$\begin{aligned} L & \rightarrow e^{i\tau_i \xi_i} e^{-i\alpha(x)} L \\ R & \rightarrow e^{-2\alpha(x)} R \\ \Phi & \rightarrow e^{i\tau_i \xi_i} e^{i\alpha(x)} \end{aligned}$$

Siamo quindi autorizzati ad effettuare la trasformazione verso il gauge unitario per Φ :

$$\Phi \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{H+v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

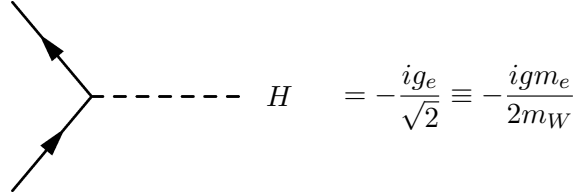
In tal caso si ha

$$\begin{aligned} -g_e (\bar{L}\Phi R + \bar{R}\Phi^\dagger L) & = -g_e \left(\bar{L} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{H+v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} R + \bar{R} \begin{pmatrix} 0 & \frac{H+v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} L \right) = \\ & = -H(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) - v(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) = \frac{g_e}{\sqrt{2}} H \bar{e} e + \frac{g_e v}{\sqrt{2}} \bar{e} e \end{aligned}$$

dunque il neutrino rimane massless, mentre l'elettrone ha acquistato una massa

$$m_e = \frac{g_e v}{\sqrt{2}}$$

dove g_e è un parametro di accoppiamento arbitrario. Introduciamo quindi un parametro libero per ognuno dei fermioni a cui vogliamo dare massa. Inoltre, nel gauge unitario compare soltanto l'accoppiamento tra il fermione e l'Higgs:



$$= -\frac{ig_e}{\sqrt{2}} \equiv -\frac{igm_e}{2m_W}$$

mentre in un R_ξ -gauge generico si ha

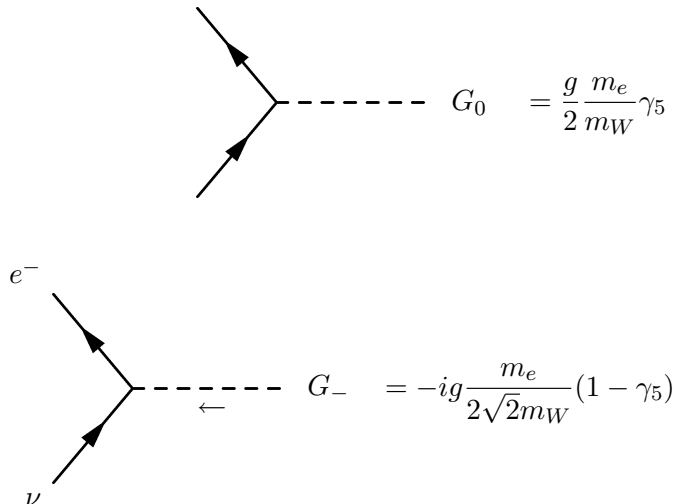
$$\Phi = \begin{pmatrix} G^+ \\ \frac{H+v+iG_0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

dunque

$$\begin{aligned} -g_e(\bar{L}\Phi R + \bar{R}\Phi^\dagger L) &= -g_e \left(\begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{e}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G^+ \\ \frac{H+v+iG_0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e_R + \bar{e}_R \begin{pmatrix} G^- & \frac{H+v-iG_0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \right) = \\ &= -g_e \left(\bar{\nu}_L G^+ e_R + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{e}_L H e_R + \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{e}_L G_0 e_R + \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{e}_L e_R + \bar{e}_R G^- \nu_L - \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{e}_R G_0 e_L + \frac{v}{\sqrt{2}} e_R e_L \right) = \\ &= -m_e \left(\bar{e}e + \frac{H}{v} \bar{e}e + \frac{i}{v} \bar{e} G_0 \gamma_5 e + \frac{\sqrt{2}}{v} \bar{e}_R G^- \nu_L + \frac{\sqrt{2}}{v} \bar{\nu}_L G^+ e_R \right) \equiv \\ &\equiv -m_e \left(\bar{e}e + \frac{gH}{2m_W} \bar{e}e + \frac{ig}{2m_W} \bar{e} G_0 \gamma_5 e + \frac{g\sqrt{2}}{2m_W} \bar{e} G^- \frac{1-\gamma_5}{2} \nu + \frac{g\sqrt{2}}{2m_W} \bar{\nu} G^+ \frac{1+\gamma_5}{2} e \right) \end{aligned}$$

Risulta quindi che il campo G_0 è pseudoscalare, in quanto è selezionato dalla combinazione $(1-\gamma_5) - (1+\gamma_5)$.

Da questi termini nascono nuovi vertici:



$$= \frac{g}{2} \frac{m_e}{m_W} \gamma_5$$

$$= -ig \frac{m_e}{2\sqrt{2}m_W} (1 - \gamma_5)$$

$$= -ig \frac{m_e}{2\sqrt{2}m_W} (1 + \gamma_5)$$

Dal valore di questi diagrammi ci rendiamo conto che l'accoppiamento del fermione con il campo di Higgs e i campi di Goldstone è piccolo, essendo proporzionale al rapporto $\frac{m_e}{m_W}$.

1.4.7 Settore di Yukawa pt. II: massa ai quark

Se volessimo dare massa ai quark usando lo stesso procedimento, ci troveremmo di fronte ad un problema, perchè saremmo in grado di dare massa soltanto alle componenti down del doppietto $\in (2, \frac{1}{3}) SU(2) \otimes U(1)$ così definito:

$$Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} = \frac{1 - \gamma_5}{2} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

dove u e d sono gli campi dei quark up e down, e le componenti right (singoletti sotto $SU(2)$, con ipercarica rispettivamente $\frac{4}{3}$ e $-\frac{1}{3}$) sono definite analogamente al caso leptonico come

$$u_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} u$$

$$d_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} d$$

Per costruzione, il campo Φ è costretto ad acquistare VEV soltanto nella componente down, ma possiamo costruire un nuovo invariante introducendo il campo $\tilde{\Phi}$:

$$\tilde{\Phi} = i\tau_2 \Phi^* = i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G^- \\ \frac{H+v-i\eta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{H+v-i\eta}{\sqrt{2}} \\ -G^- \end{pmatrix}$$

É facile vedere che $\tilde{\Phi}$ ha ipercarica -1 , infatti

$$Q_Y^{down} = 2(Q_{em}^{down} - Q_3^{down}) = 2(-1 + \frac{1}{2}) = -1$$

$$Q_Y^{up} = 2(Q_{em}^{up} - Q_3^{up}) = 2(0 - \frac{1}{2}) = -1$$

dunque $\tilde{\Phi} \in (2, 1)$, e possiamo costruire l'invariante

$$-g_d (\bar{Q}_L \Phi d_R + \bar{d}_R \Phi^* Q_L) - g_u (\bar{Q}_L \tilde{\Phi} u_R + \bar{u}_R \tilde{\Phi}^* Q_L)$$

Infatti, sotto una trasformazione di $SU(2) \otimes U(1)$, si ha

$$Q_L \rightarrow e^{i\tau_i \xi_i} e^{\frac{i}{3}\alpha(x)} Q_L$$

$$\begin{aligned}
u_R &\rightarrow e^{i\frac{4}{3}\alpha(x)}u_R \\
d_R &\rightarrow e^{-i\frac{2}{3}\alpha(x)}d_R \\
\Phi &\rightarrow e^{i\tau_i\xi_i}e^{i\alpha(x)}\Phi \\
\tilde{\Phi} &\rightarrow e^{i\tau_i\xi_i}e^{-i\alpha(x)}\Phi
\end{aligned}$$

Si può verificare facilmente che i quark acquistano masse $m_u = \frac{g_u v}{\sqrt{2}}$ e $m_d = \frac{g_d v}{\sqrt{2}}$, dove g_u e g_d sono due nuovi parametri liberi della teoria.

1.4.8 Interazioni deboli e stranezza

Storicamente, l'idea di "stranezza" nasce dall'osservazione di una serie di risultati sperimentali che coinvolgevano sezioni d'urto molto elevate, tipiche delle interazioni forti, ma tempi di decadimento molto lunghi, tipici invece delle interazioni deboli. Le particelle coinvolte in tali processi vennero definite *strane*, e si ipotizzò l'esistenza di un nuovo numero quantico, la *stranezza* (s), che potesse essere violato solo via interazioni deboli. Inizialmente quindi, la corrente debole adronica conteneva un termine che dava conto dei processi in cui $\Delta s = 0$ (ovvero la carica di stranezza era conservata), e un termine che descriveva invece processi in cui $\Delta s = 1$:

$$J_\mu^{had} = J_\mu^{\Delta s=0} + J_\mu^{\Delta s=1}$$

In seguito si formalizzò questa ipotesi introducendo un nuovo quark s , con carica $-\frac{1}{3}$, per cui la corrente debole adronica poteva essere scritta come

$$J_\mu^{had} = \cos\theta_c \bar{u}\gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} d + \sin\theta_c \bar{u}\gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} s$$

dove θ_c è il cosiddetto angolo di Cabibbo, che teneva conto del fatto che i processi con violazione di stranezza erano meno favoriti rispetto a quelli in cui la stranezza era conservata, e della leggera differenza che c'era tra la costante di Fermi misurata nel decadimento β nucleare e nel decadimento del muone:

$$G_F^\beta = \cos\theta G_F^\mu$$

Se scegliamo di scrivere la corrente adronica in termini di un doppietto:

$$L = \frac{1-\gamma_5}{2} \begin{pmatrix} u \\ d \cos\theta_c + s \sin\theta_c \end{pmatrix} \equiv \frac{1-\gamma_5}{2} \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}$$

le correnti si possono scrivere come

$$\begin{aligned}
J_\mu^{(+)} &= \bar{u}_L \gamma_\mu d'_L = \begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{d}'_L \end{pmatrix} \gamma_\mu \tau_+ \begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix} \\
J_\mu^{(-)} &= (J_\mu^{(+)})^\dagger = \bar{d}'_L \gamma_\mu u_L = \begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{d}'_L \end{pmatrix} \gamma_\mu \tau_- \begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Vediamo di nuovo che se vogliamo chiudere l'algebra delle correnti è necessario introdurre una terza corrente così fatta:

$$J_3^\mu = \begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{d}'_L \end{pmatrix} \gamma_\mu \tau_3 \begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix} = \bar{u}_L \gamma^\mu u_L - \bar{d}'_L \gamma^\mu d'_L$$

Il secondo addendo della corrente contiene termini di mixing tra i quark d ed s :

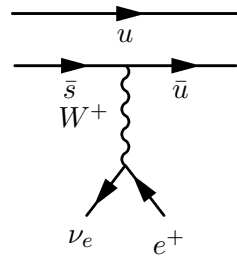
$$\cos \theta_c^2 \bar{d}_L \gamma^\mu d_L + \sin \theta_c^2 \bar{s}_L \gamma^\mu s_L + \cos \theta_c \sin \theta_c (\bar{d}_L \gamma^\mu s_L + \bar{s}_L \gamma^\mu d_L)$$

Questi processi di corrente neutra con violazione di stranezza (*FCNC*, "Flavour Changing Neutral Currents"), tuttavia, erano sperimentalmente depressi, ad esempio nel caso del decadimento del K^+ : tale particella infatti può decadere attraverso due canali

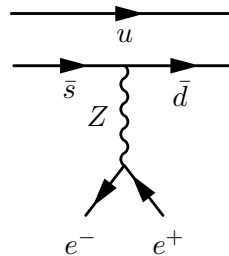
$$K^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e$$

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + e^+ e^-$$

Ma il primo canale, di corrente carica, risulta più favorito di un fattore 10^5 . In termini di diagrammi, essendo il K^+ uno stato composto $u\bar{s}$, si ha



$$B.R. = 5 \cdot 10^{-2}$$



$$B.R. = 3 \cdot 10^{-7}$$

Per spiegare questa discrepanza tra le sezioni d'urto, Glashow, Maiani e Iliopoulos suggerirono un meccanismo che prevedeva l'introduzione di un nuovo quark, il *charm*, con carica $\frac{2}{3}$. Questo quark fu poi effettivamente scoperto a SLAC nel '74, nel suo stato legato $c\bar{c}$, o particella J/Ψ : fu la prima prova sperimentale della validità del GIM mechanism. La corrente carica a questo punto deve essere modificata per includere anche le interazioni del charm:

$$J_\mu^{(+)} = \bar{u}_L \gamma_\mu d_L \cos \theta_c + \bar{u}_L \gamma_\mu s_L \sin \theta_c + \bar{c}_L \gamma_\mu d_L \cos \theta_c - \bar{c}_L \gamma_\mu s_L \sin \theta_c$$

Il segno $-$ all'ultimo termine è convenzionale, e ci suggerisce di sistemare i quark in un quadrupletto:

$$Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ c_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix}$$

e di introdurre la matrice

$$T^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ 0 & 0 & -\sin \theta_c & \cos \theta_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cosicchè le correnti cariche si possano scrivere in maniera sintetica come

$$J_\mu^{(+)} = \bar{Q}_L \gamma_\mu T^+ Q$$

$$J_\mu^{(-)} = \left(J_\mu^{(+)} \right)^\dagger = \bar{Q}_L \gamma_\mu T^- Q$$

$$T^- = (T^+)^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \theta_c & \sin \theta_c & 0 & 0 \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

É possibile mostrare che il commutatore tra T^+ e T^- è

$$[T^+, T^-] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = T_3$$

dunque per chiudere l'algebra delle correnti dobbiamo introdurre

$$J_3^\mu = \bar{Q}_L \gamma^\mu T_3 Q_L = \bar{u}_L \gamma^\mu u_L + \bar{c}_L \gamma^\mu c_L - \bar{d}_L \gamma^\mu d_L - \bar{s}_L \gamma^\mu s_L$$

Vediamo che stavolta nella corrente neutra non compaiono termini di mixing.

Tuttavia, per recuperare l'analogia con la corrente leptonica, sistemeremo i quark in doppietti, detti *famiglie*:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$$

cosicchè la corrente carica si possa scrivere come

$$J_\mu^{(+)} = \begin{pmatrix} \bar{u}_L & d_L \end{pmatrix} \gamma^\mu \tau^+ \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{c}_L & s_L \end{pmatrix} \gamma^\mu \tau^+ \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix} \equiv \bar{Q}_L^u \gamma^\mu \tau^+ Q_L^u + \bar{Q}_L^c \gamma^\mu \tau^+ Q_L^c$$

$$J_\mu^{(-)} = \bar{Q}_L^u \gamma^\mu \tau^- Q_L^u + \bar{Q}_L^c \gamma^\mu \tau^- Q_L^c$$

Data la somiglianza tra le famiglie di quark e quelle leptoniche, possiamo ipotizzare l'esistenza di altri due quark. Questi furono poi effettivamente scoperti (il *top* e il *bottom*), e sistemati nel terzo doppietto:

$$Q_L^t = \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$$

La lagrangiana debole, in termini delle tre famiglie leptoniche e delle tre famiglie di quark, si scrive finalmente come

$$\mathcal{L}_{cc} = \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{f=1}^3 \bar{L}_f \gamma^\mu \tau^+ L_f W_\mu^{(-)} + \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{f=1}^3 \bar{Q}_f \gamma^\mu \tau^+ Q_f W_\mu^{(-)} + h.c.$$

dove

$$L_1 = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \quad L_2 = \begin{pmatrix} (\nu_\mu)_L \\ \mu_L \end{pmatrix} \quad Q_3 = \begin{pmatrix} (\nu_\tau)_L \\ \tau_L \end{pmatrix}$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix} \quad Q_2 = \begin{pmatrix} c_L \\ s'_L \end{pmatrix} \quad Q_3 = \begin{pmatrix} t_L \\ b'_L \end{pmatrix}$$

I campi d' , s' e b' sono definiti da

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ t' \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} d \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

dove V è una matrice unitaria. In termini della matrice V la lagrangiana si scrive

$$\mathcal{L}_{cc} = \frac{g}{\sqrt{2}} \left[\sum_{f=1}^3 \bar{\nu}_f \gamma^\mu l_f + \sum_{f,g} \bar{u}_f \gamma^\mu V_{fg} d_g \right] W_\mu^{(-)}$$

Dal punto di vista delle rappresentazioni di $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, la rotazione unitaria V lascia inalterati gli autovalori del tripletto d su cui agisce, pertanto d e d' appartengono alla stessa rappresentazione.

Con questo meccanismo, grazie all'unitarietà di V , almeno al prim'ordine nell'interazione non compaiono termini di mixing tra i quark down delle varie famiglie:

$$\mathcal{L}_{nc} = \frac{g}{2\sqrt{2}} \left(\sum_{f=1}^3 \bar{L}_f \gamma^\mu \tau_3 L_f W_\mu^3 + \sum_{f=1}^3 \bar{Q}_f \gamma^\mu \tau_3 Q_f W_\mu^3 \right)$$

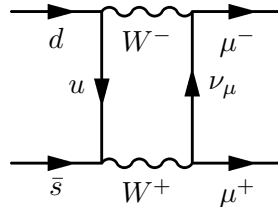
In particolare

$$\sum_{f=1}^3 \bar{Q}_f \gamma^\mu \tau_3 Q_f = \sum_{f=1}^3 \bar{u}_f \gamma^\mu u_f - \bar{d}'_f \gamma^\mu \tau_3 d'_f$$

$$\sum_{f=1}^3 \bar{d}'_f \gamma^\mu \tau_3 d'_f = \sum_{f,g=1}^3 \bar{d}_g \underbrace{V_{gf}^\dagger V_{fl}}_{\delta_{fl}} \gamma^\mu \tau_3 d_l = \sum_{f=1}^3 \bar{d}_f \gamma^\mu \tau_3 d_f$$

Tuttavia, per rendere conto della precisione sperimentale, la soppressione delle FCNC deve risultare verificata almeno fino ad ordine G_F^2 . Consideriamo ad esempio il decadimento del K^0 in due muoni:

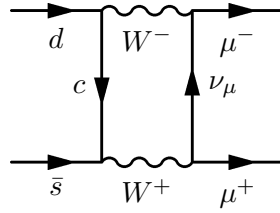
$$K^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^-$$



In questo grafico l'ampiezza è circa

$$\mathcal{M}^{(u)} \sim g^4 V^{ud} V^{us}$$

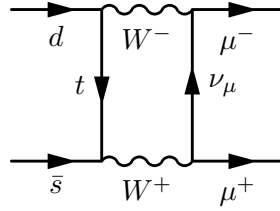
dove $V^{ud} = \cos \theta$ e $V^{us} = \sin \theta_c$. Un grafico analogo si ha con lo scambio del c :



con ampiezza

$$\mathcal{M}^{(c)} \sim g^4 V^{cd} V^{cs}$$

con stavolta $V^{cd} = -\sin \theta_c$ e $V^{cs} = \cos \theta_c$. Il terzo e ultimo grafico vede lo scambio del top:



con ampiezza

$$\mathcal{M}^{(t)} \simeq g^4 V^{dt} V^{ts}$$

ma stavolta gli elementi di matrice V^{dt} e V^{ts} sono molto piccoli e l'ampiezza è trascurabile. I contributi principali all'ampiezza, a ordine g^4 , sono quindi quelli relativi allo scambio di u e c :

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^{(u)} + \mathcal{M}^{(c)}$$

Nell'approssimazione in cui le masse dei due quark sono le stesse, le due ampiezze sono uguali e opposte, e l'ampiezza totale per il processo è quindi nulla. Con un calcolo un pò più preciso si scopre che

$$A(K^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^-) \sim G_F^2 (m_c^2 - m_u^2)$$

qualunque cosa il Casalbuni intenda per $A(K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-)$. Da questo risultato si può trarre una stima rozza per la massa del quark c attorno agli $1.5 GeV$: in effetti la massa della J/Ψ , quando fu scoperta, era intorno ai $3 GeV$. Tuttavia, quando si parla di quark non si sa bene cosa definire per massa, dato che il quark come entità a sè stante non esiste. Per ottenere un quark libero possiamo sfruttare la frammentazione di un nucleo da una collisione in interazione forte, ma appena questa avviene, l'intorno del quark adronizza (si forma cioè un *jet*) e questo rende impossibile ogni misura sul singolo quark. Di solito quando si parla della massa di quark ci si riferisce alla sua *massa costituente* (diversa dalla *massa corrente*, ad esempio gli $0.511 MeV$ dell'elettrone), definita come la massa del quark più l'energia della nuvola di gluoni che lo

circonda: rozzamente, per stati legati del tipo $q\bar{q}$ questo equivale a metà della massa totale, ad esempio dalla J/Ψ che ha massa 3.096GeV si estrae $m_c \sim 1.5\text{GeV}$, e dalla Υ (uno stato legato $b\bar{b}$, scoperto nel 77), con massa intorno ai 10GeV , si ricava $m_b \sim 5\text{GeV}$. Come per le masse dei leptoni, che vanno dal mezzo MeV dell'elettrone ai 1800MeV del tauone, passando per i 100MeV del muone, anche per i quark si spazia dai pochi MeV dei quark up e down, che possono essere a tutti gli effetti considerati massless, alle centinaia di GeV del quark top, passando per i 100MeV del quark s , e per gli $1 - 5\text{GeV}$ di c e b . Anche in questo caso, parlando di massa per i quark, ci riferiamo a dei modelli in cui viene ipotizzato un qualche meccanismo di generazione di massa: nel modello standard i quark prendono massa grazie al meccanismo di Higgs con dei parametri opportuni, ma al suo interno non vengono predetti tali parametri; alcune delle teorie che cercano di predire i corretti valori delle masse ipotizzano che queste vengano generate mediante una rottura dinamica della simmetria chirale.

Il quark top è il quark più massivo ($m_t = 172.4 \pm 1.2\text{GeV}$), e fu scoperto a TEVATRON mediante questi processi:



Nel primo, una coppia quark-antiquark può annichilarsi in un gluone che si rimaterializza in una coppia $t\bar{t}$, mentre nel secondo due gluoni vengono emessi durante lo scattering, e interagendo danno lo stesso risultato. Chiaramente la coppia $t\bar{t}$ decade in tempi brevissimi, seguendo il canale principale di decadimento

$$t\bar{t} \rightarrow W^+ b W^- \bar{b}$$

I bottom sono subito persi, riadronizzando in un jet, mentre i W o decadono di nuovo in quark (e in tal caso non vedremmo niente per gli stessi motivi), oppure decadono in una coppia leptone-neutrino (quindi via interazione debole). Si osservarono 12 eventi con nello stato finale un leptone dal W^+ , uno dal W^- , più i jet contro i 2.5 attesi da puri calcoli di QCD senza considerare i processi che coinvolgevano il top. Inoltre si osservarono altri 86 eventi con un solo leptone più jet, contro i 37 attesi. Dall'analisi di questi dati si estrasse l'ipotesi che si potesse trattare di una coppia $t\bar{t}$ con massa per il top attorno ai 180GeV ; per tale coppia non si forma uno stato legato come per la J/Ψ e la Υ , perchè la larghezza di decadimento è circa 1.2GeV , a cui corrisponde un tempo di decadimento di circa 10^{22}s .

1.4.9 La matrice CKM

Formalizzeremo più in generale l'idea della matrice CKM e del mixing fra gli autostati di massa. Poichè i neutrini non acquistano massa, possiamo scrivere un settore di Yukawa di questa forma:

$$\mathcal{L}_Y = -\frac{v}{\sqrt{2}} \sum_{A,B} \left(g_{AB}^e (\bar{e}'_L)_A \gamma^\mu (e'_R)_B + g_{AB}^u (\bar{u}'_L)_A \gamma^\mu (u'_R)_B + g_{AB}^d (\bar{d}'_L)_A \gamma^\mu (d'_R)_B \right) + h.c.$$

dove gli indici A e B vanno da 1 a 3 e corrono sulle tre famiglie leptoniche o di quark. Le matrici di massa sono quindi

$$\mathcal{M}_{AB}^i = \frac{v}{\sqrt{2}} g_{AB}^i$$

e in generale non hanno nessuna proprietà di simmetria, a parte quella di poter essere diagonalizzate da una trasformazione biunitaria:

$$M^i = (S^i)^\dagger \mathcal{M}^i T^i \leftrightarrow \mathcal{M}^i = (T^i)^\dagger M^i S^i$$

dove S^i e T^i sono matrici unitarie che dipendono dalle particelle considerate, e M^i è diagonale. In questo modo

$$(\bar{\psi}'_L)_A \mathcal{M}_{AB} (\psi'_R)_B = (\bar{\psi}'_L)_A T^\dagger M_{AB} S (\psi'_R)_B = m_A (\bar{\psi}'_L)_A (\psi'_R)_A$$

dove i campi ψ_L e ψ_R , gli *autostati di massa*, sono definiti da due trasformazioni diverse:

$$\psi_R = S \psi'_R \rightarrow \psi'_R = S^\dagger \psi_R \equiv S^{-1} \psi_R$$

$$\psi_L = T \psi'_L \rightarrow \psi'_L = T^\dagger \psi_L \equiv T^{-1} \psi_L$$

Vediamo come si scrive in questo caso la corrente carica:

$$J_{(+)}^\mu = (\bar{Q}'_L)_A \gamma^\mu \tau_+ (Q'_L)_A = (\bar{u}'_L)_A \gamma^\mu (d'_L)_A = (\bar{u}_L)_A \gamma^\mu \left(T^{(u)} T_{(d)}^{-1} \right)_{AB} (d_L)_B$$

Una volta riespressa la corrente carica in termini degli autostati di massa, riotteniamo la matrice CKM definendo $V = T^{(u)} T_{(d)}^{-1}$. Osserviamo che per convenzione la matrice CKM viene fatta agire sulle componenti down dei quark, determinandone il mixing, ma sarebbe stato del tutto equivalente ipotizzare un mixing delle componenti superiori.

Per quanto riguarda la corrente neutra:

$$J_3^\mu = \bar{u}'_L \gamma^\mu u'_L - \bar{d}'_L \gamma^\mu d'_L = \bar{u}_L \gamma^\mu (T^{(u)} T_{(u)}^{-1}) u_L - \bar{d}_L \gamma^\mu (T^{(d)} T_{(d)}^{-1}) d_L = \bar{u}_L \gamma^\mu u_L - \bar{d}_L \gamma^\mu d_L$$

dunque la corrente neutra è diagonale rispetto alla trasformazione verso gli autostati di massa, e non compaiono correnti neutre con cambio di flavour.

Infine, per la parte leptonica:

$$J_\mu^l = (\bar{\nu}'_L)_A \gamma_\mu (e'_L)_A$$

Se andiamo nella base degli autostati di massa per il leptone:

$$(e'_L) = T_{(l)}^{-1} e_L$$

$$J_\mu^l = (\bar{\nu}'_L)_A \gamma_\mu \left(T_{(l)}^{-1} \right)_{AB} (e_L)_B$$

I neutrini sono massless, ergo la loro matrice di massa è la matrice nulla, pertanto una qualunque combinazione lineare dei suoi autostati continuerà ad essere autostato di massa. Questo ci permette di scegliere arbitrariamente la base dei neutrini, sceglieremo pertanto

$$(\nu_L)_A = (T)_{AB} (\nu'_L)_B$$

in modo che

$$J_\mu^l = (\bar{\nu}_L)_A \gamma_\mu (e_L)_A$$

La matrice CKM è una matrice unitaria 3×3 , dunque dipende da 3 parametri reali e una fase, per un totale di 4 parametri aggiuntivi da inserire nella lagrangiana. Tuttavia introdurre una fase implica considerare la possibilità di avere una non conservazione di CP (o equivalentemente di T): inizialmente infatti si era a conoscenza di violazioni esplicite della parità e della coniugazione di carica singolarmente, ma non di violazioni contemporanee delle due. In seguito si ebbero evidenze di violazioni di CP nel sistema $K^0 \bar{K}^0$: esistono infatti due versioni del kaone neutro, il K_L^0 (long) e il K_S^0 (short) che hanno tempi di decadimento diversi, rispettivamente $\sim 10^{-8}s$ e $\sim 10^{-10}s$. Questi stati sono ottenuti come combinazioni lineari degli autostati di interazione forte K^0 e \bar{K}^0 , dove \bar{K}^0 è definito come il trasformato di CP di K^0 :

$$CP|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle$$

Le due combinazioni

$$|K^0\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle)$$

$$|K^0\rangle_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle)$$

risultano essere autostati di CP , con autovalori

$$CP|K^0\rangle_+ = |K^0\rangle_+$$

$$CP|K^0\rangle_- = -|K^0\rangle_-$$

Se CP è conservata, i due sistemi appena definiti decadano in sistemi con CP -parità opposta. Per il $|K^0\rangle_+$, possiamo pensare che verosimilmente decada in uno dei seguenti due modi

$$(K^0)_+ \rightarrow \pi^+ + \pi^-$$

$$(K^0)_+ \rightarrow \pi^0 + \pi^0$$

infatti la parità di una coppia $\pi\pi$ in uno stato $L = 0$ è 1, così come l'autovalore della coniugazione di carica: dunque, dovendo decadere verso stati con CP negativa, il primo decadimento utile per il $(K^0)_-$ è quello a tre pioni, ovviamente più lento servendo più energia nel centro di massa per produrre le particelle. Se facciamo corrispondere il K_L^0 al $(K^0)_+$, e il K_S^0 al $(K^0)_-$, ci aspettiamo di non poter mai osservare un K_L^0 che decade in due pioni: tuttavia, nel 1964, Fitch e Cronin riscontrarono dei decadimenti di K_L^0 in due pioni, il che implicava che K_L^0 e K_S^0 non coincidono con gli autostati di CP , bensì sono una loro combinazione

$$K_S = (K^0)_+ + \epsilon(K^0)_-$$

$$K_L = (K^0)_- + \epsilon(K^0)_+$$

da cui analogamente anche il K_S^0 ha la possibilità di decadere in stati con $CP = -1$. Dagli esperimenti risulta che il parametro $|\epsilon|$ vale circa $2.3 \cdot 10^{-3}$, dunque CP è violata all'ordine del per mille.

Parlando della violazione di CP , questa può essere *indiretta*, come nel caso del decadimento del K_L^0 , in cui la violazione è a livello dello stato finale, oppure *diretta*, ovvero si ha violazione di CP già a livello

dell'interazione mediante i bosoni mediatori: questo permette di ottenere dati utili per la determinazione delle entrate della matrice CKM da un numero maggiore di processi. Una possibile parametrizzazione per la matrice CKM è

$$\begin{pmatrix} c_1 & s_1 c_3 & s_1 s_3 \\ -s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 e^{i\delta} \\ -s_1 s_2 & c_1 s_2 c_3 + c_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 e^{i\delta} \end{pmatrix}$$

dove $c_i, s_i \equiv \cos \theta_i, \sin \theta_i$. $\theta_1 \equiv \theta_c$ è l'angolo di Cabibbo, e poichè il primo blocco diagonale $2 \times$, ovvero il mixing di Cabibbo per i quark d e s , riproduceva già bene i dati sperimentali, è necessario che θ_3 sia piccolo. A volte la matrice CKM viene scritta come

$$\begin{pmatrix} V^{ud} & V^{us} & V^{ub} \\ V^{cd} & V^{cs} & V^{cb} \\ V^{td} & V^{ts} & V^{tb} \end{pmatrix}$$

dove si evidenzia in quali tipi di processi l'elemento di matrice interviene: ad esempio V^{ud} si ricava dal decadimento β del nucleone e risulta essere ~ 0.9736 , V^{us} si ricava dai decadimenti dei kaoni e vale ~ 0.22 , V^{cd} si ottiene studiando la produzione del charm in esperimenti di deep inelastic scattering (~ 0.22), mentre V^{tb} è ricavato dal branching ratio del decadimento $t \rightarrow Wb$ (~ 0.9991). Sperimentalmente risulta quindi che gli elementi sulla diagonale della matrice CKM valgono circa 1, mentre allontanandosi dalla diagonale essi diventano sempre più piccoli; tuttavia non esiste una teoria che preveda quanto debbano valere gli elementi della matrice CKM, per cui i suoi 4 parametri sono completamente liberi e vengono fissati in modo da riprodurre i dati sperimentali.

1.4.10 Simmetrie accidentali

Il fatto che nel modello standard i neutrini siano considerati massless ci consente di introdurre una sola matrice di mixing, la matrice CKM, per le componenti dei quark. Osserviamo inoltre che un eventuale mixing tra le componenti dei leptoni avrebbe portato ad una non conservazione del numero leptonico, non osservata sperimentalmente: se vogliamo costruire una teoria in cui i neutrini hanno massa, e quindi in cui è necessario introdurre una matrice di mixing per i leptoni, dobbiamo assicurarci che i suoi elementi diagonali siano piccoli, in modo che gli accoppiamenti non osservati diano luogo ad ampiezze di ordine inferiore rispetto alle incertezze sperimentali. Nel modello standard, la non violazione del numero leptonico è un esempio delle cosiddette *simmetrie accidentali*. Infatti, se consideriamo tutti i campi della teoria:

$$\psi_1 \equiv e_R \in (1, -2)$$

$$\psi_2 \equiv L \in (2, -1)$$

$$\psi_3 \equiv u_R \in (1, \frac{4}{3})$$

$$\psi_4 \equiv d_R \in (1, -\frac{1}{3})$$

$$\psi_5 \equiv Q_L \in (2, \frac{1}{3})$$

i vari termini della lagrangiana sono tali da renderla invariante sotto una trasformazione di fase globale di uno qualunque di questi 5 campi

$$\psi_i \rightarrow e^{i\alpha} \psi_i$$

dunque la lagrangiana risulta invariante sotto una simmetria globale $U(1)^5$, inizialmente non richiesta. A questa simmetria corrisponde ovviamente via teorema di Noether la conservazione di 5 correnti:

$$J_1^\mu = \bar{e}_R \gamma^\mu e_R$$

$$J_2^\mu = \bar{e}_L \gamma^\mu e_L + \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L = \bar{e}_L \gamma^\mu e_L + \bar{\nu} \gamma^\mu \frac{(1 - \gamma_5)}{2} \nu$$

$$J_3^\mu = \bar{u}_R \gamma^\mu u_R$$

$$J_4^\mu = \bar{d}_R \gamma^\mu d_R$$

$$J_5^\mu = \bar{u}_L \gamma^\mu u_L + \bar{d}_L \gamma^\mu d_L$$

Equivalentemente, possiamo definire le trasformazioni di simmetria in modo che le correnti conservate siano 5 combinazioni lineari indipendenti di queste 5 correnti, ad esempio possiamo considerare la scelta

$$J_Y^\mu = \sum_{k=1}^5 \frac{Y_k}{2} J_k^\mu$$

$$J_l^\mu = \bar{\nu} \gamma^\mu \nu + \bar{e} \gamma^\mu e$$

$$J_{l5}^\mu = \bar{\nu} \gamma^\mu \gamma_5 \nu + \bar{e} \gamma^\mu \gamma_5 e$$

$$J_b^\mu = \frac{1}{3} (J_3^\mu + J_4^\mu + J_5^\mu) = \frac{1}{3} (\bar{u} \gamma^\mu u + \bar{d} \gamma^\mu d)$$

$$J_{b5}^\mu = J_3^\mu + J_4^\mu - J_5^\mu = \bar{u} \gamma^\mu \gamma_5 u + \bar{d} \gamma^\mu \gamma_5 d$$

La corrente J_Y non è altro che la corrente di ipercarica, la cui conservazione corrisponde all'invarianza locale della teoria, dunque la vera simmetria accidentale è sotto $U(1)^4$ piuttosto che sotto $U(1)^5$. La conservazione delle correnti J_l e J_b non rappresenta altro che la conservazione del numero leptonico e del numero barionico, il che ci fa piacere dato che questi due numeri quantici sono conservati sperimentalmente con precisione altissima. Le correnti J_{l5} e J_{b5} , infine, non sono che le correnti assiali leptonica e barionica, la cui conservazione è però incompatibile con un termine di massa, infatti le simmetrie corrispondenti sono rotte dall'introduzione del settore di Yukawa. Quest'ultimo lascia comunque inalterate J_l e J_b , preservando quindi i numeri leptonico e barionico, anche se dobbiamo osservare che mentre i numeri leptonici associati alle tre famiglie sono conservati singolarmente, a causa del mixing CKM soltanto il numero barionico totale è conservato.

1.5 Anomalie

Con il termine *anomalia* si intende una simmetria presente a livello classico, rotta a livello quantistico per una qualsiasi scelta del tipo di regolarizzazione. In termini di path integral, si ha una simmetria dell'azione che non è anche una simmetria della misura, e quindi del funzionale generatore nel suo complesso. Un esempio è l'anomalia chirale in elettrodinamica quantistica, o anomalia ABJ (dai nomi di Adler, Bardeen e Jackiw): a livello classico sappiamo che le equazioni del moto dell'elettrodinamica prevedono

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

$$\partial_\mu J_A^\mu = 2miJ_A(x)$$

dove

$$J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

$$J_A^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$$

$$J_A(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$$

Le due equazioni ci dicono semplicemente che la corrente elettromagnetica J^μ è conservata, mentre la corrente chirale J_A^μ non lo è, come è ovvio che sia in presenza di particelle massive: nel limite di massa nulla la corrente assiale chirale torna comunque ad essere conservata. Se definiamo le funzioni a tre punti

$$T^{\mu\nu\lambda}(x_1, x_2) = (-i)^3 \langle T \{ J^\mu(x_1) J^\nu(x_2) J_A^\lambda(0) \} \rangle$$

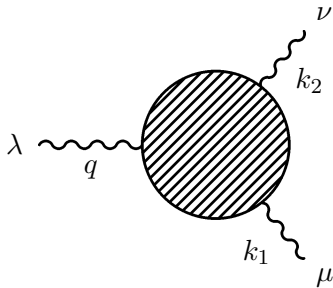
$$T^{\mu\nu}(x_1, x_2) = (-i)^3 \langle T \{ J^\mu(x_1) J^\nu(x_2) J_A(0) \} \rangle$$

In rappresentazione degli impulsi:

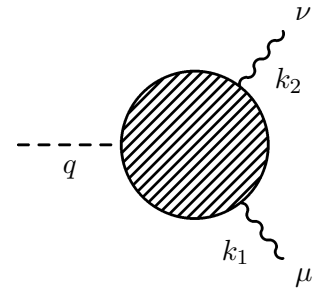
$$T^{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, q) = i \int d^4x_1 d^4x_2 e^{ik_1 \cdot x_1} e^{ik_2 \cdot x_2} \langle T \{ J^\mu(x_1) J^\nu(x_2) J_A^\lambda(0) \} \rangle$$

$$T^{\mu\nu}(k_1, k_2, q) = i \int d^4x_1 d^4x_2 e^{ik_1 \cdot x_1} e^{ik_2 \cdot x_2} \langle T \{ J^\mu(x_1) J^\nu(x_2) J_A(0) \} \rangle$$

In termini di diagrammi si possono rappresentare come



$$T^{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, q)$$



$$T^{\mu\nu}(k_1, k_2, q)$$

Le leggi di conservazione delle correnti danno luogo a delle identità per le funzioni a tre punti, dette *identità di Slavnov-Taylor* (o identità di Ward generalizzate):

$$(k_1)^\mu T^{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, q) = (k_2)^\nu T^{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, q) = 0$$

$$q_\lambda T^{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, q) = 2mT^{\mu\nu}$$

Che possono essere verificate osservando che

$$\partial_x^\mu \langle T \{ J_\mu(x) O(y) \} \rangle = \partial_x^\mu (\theta(x_0 - y_0) J_\mu(x) O(y) + \theta(y_0 - x_0) J_\mu(x) O(y))$$

dove $O(y)$ è un operatore locale qualsiasi. Si ha allora

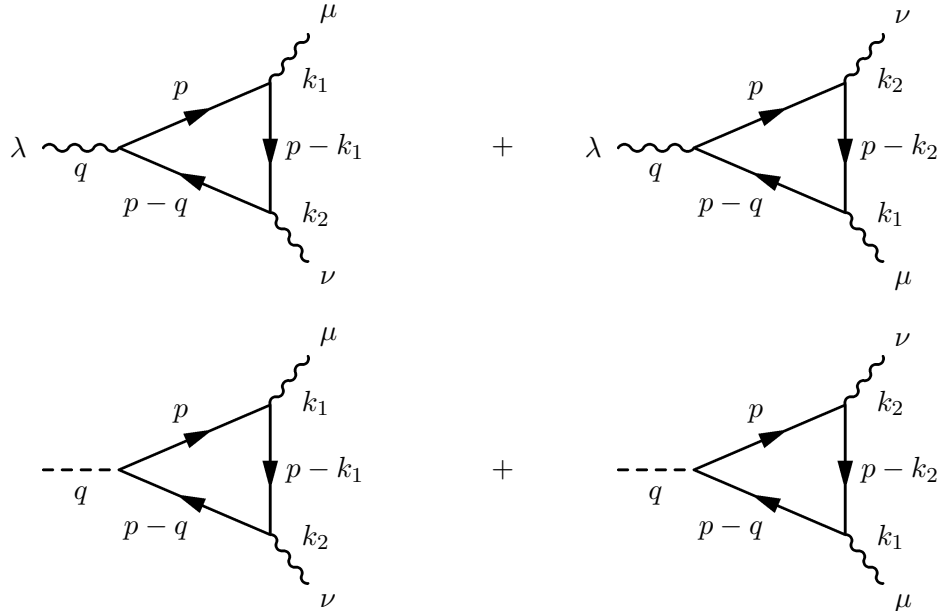
$$= \delta(x_0 - y_0) J_0(x) O(y) + \theta(x_0 - y_0) (\partial_\mu J^\mu) O(y) - \delta(x_0 - y_0) O(y) J_0(x) + \theta(y_0 - x_0) O(y) \partial_\mu J^\mu(x) =$$

$$= T \{ (\partial_\mu J^\mu) O(y) \} + \delta(x_0 - y_0) [J_0(x), O(y)]$$

Ma a tempi uguali il commutatore $[J_0(x), O(y)]$ svanisce, dunque

$$\partial_x^\mu \langle T \{ J_\mu(x) O(y) \} \rangle = \langle T \{ (\partial^\mu J_\mu(x)) O(y) \} \rangle = 0$$

Se andiamo a calcolare il contributo all'ordine più basso delle funzioni a tre punti, i cosiddetti *grafici a triangolo*, ci rendiamo conto che le identità di Slavnov-Taylor non sono soddisfatte:



$$T^{\mu\nu\lambda} = (-1)i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr \left[\frac{i}{\not{p}-m} \gamma^\lambda \gamma_5 \frac{i}{\not{p}-\not{q}-m} \gamma^\nu \frac{i}{\not{p}-\not{k}_1-m} \gamma^\mu \right] + Tr \left[\frac{i}{\not{p}-m} \gamma^\lambda \gamma_5 \frac{i}{\not{p}-\not{q}-m} \gamma^\mu \frac{i}{\not{p}-\not{k}_2-m} \gamma^\nu \right]$$

$$T^{\mu\nu} = (-1)i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr \left[\frac{i}{\not{p}-m} \gamma_5 \frac{i}{\not{p}-\not{q}-m} \gamma^\nu \frac{i}{\not{p}-\not{k}_1-m} \gamma^\mu \right] + Tr \left[\frac{i}{\not{p}-m} \gamma_5 \frac{i}{\not{p}-\not{q}-m} \gamma^\mu \frac{i}{\not{p}-\not{k}_2-m} \gamma^\nu \right]$$

Consideriamo per semplicità il caso massless. Ci aspetteremmo quindi che $q_\lambda T^{\mu\nu\lambda} = 0$, ma vedremo che non è così: infatti utilizzando l'identità

$$\not{q}\gamma_5 = \gamma_5(\not{p} - \not{q}) + \not{p}\gamma_5$$

si ha

$$\begin{aligned} q_\lambda T^{\mu\nu\lambda} &= - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{1}{\not{p}} [\gamma_5(\not{p} - \not{q}) + \not{p}\gamma_5] \frac{1}{\not{p} - \not{q}} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - k_1} \gamma^\mu \right] + \\ &\quad + \text{Tr} \left[\frac{1}{\not{p}} [\gamma_5(\not{p} - \not{q}) + \not{p}\gamma_5] \frac{1}{\not{p} - \not{q}} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - k_2} \gamma^\nu \right] = \\ &= - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{1}{\not{p}} \gamma_5 \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - k_1} \gamma^\mu + \gamma_5 \frac{1}{\not{p} - \not{q}} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - k_1} \gamma^\mu \right] + \\ &\quad + \text{Tr} \left[\frac{1}{\not{p}} \gamma_5 \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - k_2} \gamma^\nu + \gamma_5 \frac{1}{\not{p} - \not{q}} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - k_2} \gamma^\nu \right] = \\ &= - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{1}{\not{p}} \gamma_5 \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - k_1} \gamma^\mu - \frac{1}{\not{p} - k_1} \gamma_5 \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{q}} \gamma^\nu \right] + \\ &\quad + \text{Tr} \left[\frac{1}{\not{p}} \gamma_5 \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - k_2} \gamma^\nu - \frac{1}{\not{p} - k_2} \gamma_5 \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - \not{q}} \gamma^\mu \right] = \\ &= - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{1}{\not{p}} \gamma_5 \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - k_1} \gamma^\mu - \frac{1}{\not{p} - k_2} \gamma_5 \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - \not{q}} \gamma^\mu \right] + \\ &\quad + \text{Tr} \left[\frac{1}{\not{p}} \gamma_5 \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - k_2} \gamma^\nu - \frac{1}{\not{p} - k_1} \gamma_5 \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{q}} \gamma^\nu \right] \equiv \\ &\quad \equiv \Delta_{(1)}^{\mu\nu} + \Delta_{(2)}^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Osservando che $q = k_1 + k_2$, l'integrale si annullerebbe se fosse possibile effettuare lo shift $p \rightarrow p - k_2$ nel secondo termine e $p \rightarrow p - k_1$ nel quarto termine. Ma gli integrali sono divergenti linearmente e una traslazione della variabile di integrazione dà luogo a extra-termini finiti, per cui l'identità di Slavnov-Taylor non è più valida.

1.5.1 Shift delle variabili per integrali divergenti linearmente

In una dimensione, si può mostrare che la traslazione della variabile di integrazione può non essere ammessa per un integrale divergente. Ad esempio se definiamo la quantità

$$\Delta(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx [f(x+a) - f(x)]$$

possiamo renderci conto che $\Delta(a)$ può essere diversa da zero espandendo in serie l'integrando:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx [f(x+a) - f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[a f'(x) + \frac{a^2}{2} f''(x) + \dots \right] = a (f(\infty) - f(-\infty)) + \frac{a^2}{2} (f'(\infty) - f'(-\infty)) + \dots$$

Quando l'integrale converge, o al più diverge logicamente si ha che $f(\pm\infty) = f'(\pm\infty) = f''(\pm\infty) = \dots = 0$ dunque $\Delta(a) = 0$, ma per un integrale linearmente divergente $f(\pm\infty) \neq 0$, mentre $f'(\pm\infty) = 0$, dunque $\Delta(a)$ in generale non si annulla:

$$\Delta(a) = a(f(\infty) - f(-\infty))$$

Questo è un cosiddetto *termine di superficie* (considerando che per una retta per "superficie" si intendono i suoi punti estremi). La generalizzazione per un integrale linearmente divergente in n dimensioni è diretta:

$$\Delta(a) = \int d^n r \left[a^\lambda \frac{\partial}{\partial r^\lambda} f(r) + \frac{1}{2} a^\lambda \frac{\partial}{\partial r^\lambda} f(r) a^\sigma \frac{\partial}{\partial r^\sigma} f(r) + \dots \right]$$

Per il teorema di Gauss, l'integrale di volume della divergenza $\partial_\lambda(a^\lambda f(r))$ in n dimensioni diventa l'integrale di superficie di $\frac{R_\sigma}{R}(a^\sigma f(r))$ in $n - 1$ dimensioni, dove R è il raggio dell'ipersfera $S_n(R)$ che racchiude il volume di integrazione. Se $R \rightarrow \infty$, quindi, sopravviverà soltanto il primo termine:

$$\Delta(a) = a^\lambda \frac{R_\lambda}{R} f(R) S_n(R)$$

Nel caso minkowskiano si ha

$$\Delta(a) = a^\tau \int d^4 r \partial_\tau f(r) = 2i\pi^2 a^\tau \lim_{R \rightarrow \infty} R^2 R_\tau f(R)$$

L'ampiezza $T^{\mu\nu\lambda}$ a 1 loop risulta proprio linearmente divergente, quindi possiamo applicarle le tecniche appena apprese. Poichè il fermione tra il vertice vettoriale e quello assiale porta impulso p , possiamo pensare di traslare tale impulso di una quantità a , combinazione lineare arbitraria di k_1 e k_2 :

$$p \rightarrow p + a$$

$$a = \alpha k_1 + (\alpha - \beta) k_2$$

e valutare la grandezza

$$\begin{aligned} \Delta(a) = T^{\mu\nu\lambda}(a) - T^{\mu\nu\lambda}(0) &= (-1) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Tr \left[\frac{1}{\not{p} + \not{a}} \gamma^\lambda \gamma_5 \frac{1}{\not{p} + \not{a} - \not{k}} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} + \not{a} - \not{k}_1} \gamma^\mu \right] - \\ &- Tr \left[\frac{1}{\not{p}} \gamma^\lambda \gamma_5 \frac{1}{\not{p} - \not{k}} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - \not{k}_1} \gamma^\mu \right] + \left(\begin{array}{c} k_1 \leftrightarrow k_2 \\ \mu \leftrightarrow \nu \end{array} \right) \equiv \Delta_{(1)}^{\mu\nu\lambda} + \Delta_{(2)}^{\mu\nu\lambda} \end{aligned}$$

Si ha allora

$$\Delta_{(1)}^{\mu\nu\lambda} = (-1) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} a^\tau \frac{\partial}{\partial p^\tau} Tr \left[\frac{1}{\not{p}} \gamma^\lambda \gamma_5 \frac{1}{\not{p} - \not{k}} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - \not{k}_1} \gamma^\mu \right] = \frac{-i2\pi^2 a^\tau}{(2\pi)^4} \lim_{p \rightarrow \infty} p^2 p_\tau Tr \left[\gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma_5 \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\delta \gamma^\mu \right] \frac{p_\alpha p_\beta p_\delta}{p^6}$$

Consideriamo la traccia

$$Tr \left[\gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma_5 \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\delta \gamma^\mu \right] = -Tr \left[\gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma_5 \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma^\mu \right] + 2g^{\nu\beta} Tr \left[\gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma_5 \gamma^\delta \gamma^\mu \right]$$

Nel primo termine possiamo adesso sostituire a $\gamma^\beta\gamma^\delta$ metà del suo anticommutatore, essendo saturata con la quantità simmetrica $p_\beta p_\delta$:

$$= -g^{\beta\delta} Tr \left[\gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma_5 \gamma^\nu \gamma^\mu \right] + 2g^{\nu\beta} Tr \left[\gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma_5 \gamma^\delta \gamma^\mu \right] = -4i \left(-g^{\beta\delta} \epsilon^{\alpha\lambda\nu\mu} + 2g^{\nu\beta} \epsilon^{\alpha\lambda\delta\mu} \right)$$

ma il secondo termine svanisce perchè è saturato anch'esso con $p_\alpha p_\delta$, per cui

$$\Delta_{(1)}^{\mu\nu\lambda} = \frac{i2\pi^2 a^\tau}{(2\pi)^4} \lim_{p \rightarrow \infty} p_\tau \left[4i \left(-g^{\beta\delta} \epsilon^{\alpha\lambda\nu\mu} \right) \right] \frac{p_\alpha p_\beta p_\delta}{p^4} = \frac{i2\pi^2 a^\tau}{(2\pi)^4} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p_\tau p_\alpha}{p^2} 4i \epsilon^{\alpha\lambda\mu\nu}$$

Sostituendo $\frac{p_\tau p_\alpha}{p^2}$ con $\frac{g_{\tau\alpha}}{4}$:

$$\Delta_{(1)}^{\mu\nu\lambda} = \epsilon^{\mu\nu\lambda\alpha} \frac{a_\alpha}{8\pi^2}$$

La quantità $\Delta_{(2)}^{\mu\nu\lambda}$ si ottiene da $\Delta_{(1)}^{\mu\nu\lambda}$ scambiando μ con ν e k_1 con k_2 , da cui

$$\begin{aligned} \Delta^{\mu\nu\lambda} &= \Delta_{(1)}^{\mu\nu\lambda} + \Delta_{(2)}^{\mu\nu\lambda} = \frac{\beta}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\alpha} (k_1 - k_2)_\alpha \equiv T^{\mu\nu\lambda}(a) - T^{\mu\nu\lambda}(0) \\ &\Rightarrow T^{\mu\nu\lambda}(a) \equiv T^{\mu\nu\lambda}(\beta) = T^{\mu\nu\lambda}(0) + \frac{\beta}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\alpha} (k_1 - k_2)_\alpha \end{aligned}$$

Se adesso cerchiamo di imporre le identità di Slavnov-Taylor, ci accorgiamo che non esiste β tale da soddisfarle entrambe, contemporaneamente. Infatti se consideriamo i termini di superficie per $T^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \Delta_{(1)}^{\mu\nu} &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Tr \left[\frac{1}{\not{p}} \gamma_5 \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - \not{k}_1} \gamma^\mu - \frac{1}{\not{p} - \not{k}_2} \gamma_5 \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - \not{k}_1} \gamma^\mu \right] = \\ &= - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Tr \left[\frac{1}{\not{p} - \not{k}_2} \gamma_5 \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - \not{k}_2 - \not{k}_1} \gamma^\mu - \frac{1}{\not{p}} \gamma_5 \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - \not{k}_1} \gamma^\mu \right] = \\ &= k_2^\tau \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial p^\tau} Tr \left[\frac{1}{\not{p}} \gamma_5 \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - \not{k}_1} \gamma^\mu \right] = k_2^\tau \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial p^\tau} \frac{Tr [\not{p} \gamma_5 \gamma^\nu (\not{p} - \not{k}_1) \gamma^\mu]}{p^2 (p - k_1)^2} = \end{aligned}$$

Osserviamo che nella traccia il termine contenente il prodotto $\not{p} \gamma_5 \gamma^\nu \not{p} \gamma^\mu$ si annulla per l'antisimmetria, e sopravvive solo $(-\not{p} \gamma_5 \gamma^\nu \not{k}_1 \gamma^\mu)$:

$$\begin{aligned} &= - \frac{2\pi^2 i k_2^\tau}{(2\pi)^4} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p_\tau}{p^2} Tr \left[\gamma^\alpha \gamma_5 \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\mu \right] p_\alpha (k_1)_\beta = - \frac{2\pi^2 i k_2^\tau}{(2\pi)^4} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p_\tau p_\alpha}{p^2} \left(-4i \epsilon^{\alpha\nu\beta\mu} \right) (k_1)_\beta = \\ &= - \frac{2\pi^2 i k_2^\tau}{(2\pi)^4} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{g_{\tau\alpha}}{4} \left(-4i \epsilon^{\alpha\nu\beta\mu} \right) (k_1)_\beta = - \frac{1}{8\pi^2} \epsilon^{\alpha\nu\beta\mu} (k_2)_\alpha (k_1)_\beta \equiv \frac{1}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (k_1)_\alpha (k_2)_\beta \end{aligned}$$

Stavolta scambiando $\mu \leftrightarrow \nu$ e $k_1 \leftrightarrow k_2$ si ottiene lo stesso risultato, per cui

$$\Delta_{(1)}^{\mu\nu} = \Delta_{(2)}^{\mu\nu}$$

La seconda identità di Slavnov-Taylor, o *identità assiale*, si scrive allora

$$q_\lambda T^{\mu\nu\lambda}(\beta) = \underbrace{q_\lambda T^{\mu\nu\lambda}(0)}_{=2\Delta_{(1)}^{\mu\nu}} + \frac{\beta}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\alpha} (k_1 - k_2)_\alpha (k_1 + k_2)_\lambda = (1 - \beta) \frac{1}{4\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (k_1)_\alpha (k_2)_\beta$$

La prima identità di Slavnov-Taylor, o *identità vettoriale*, invece, si scrive come

$$(k_1)_\mu T^{\mu\nu\lambda}(0) = - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Tr \left[\frac{1}{\not{p}} \gamma^\lambda \gamma_5 \frac{1}{\not{p} - \not{q}} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - \not{k}_1} k_1 \right] + Tr \left[\frac{1}{\not{p}} \gamma^\lambda \gamma_5 \frac{1}{\not{p} - \not{q}} k_1 \frac{1}{\not{p} - \not{k}_2} \gamma^\nu \right] =$$

Con le sostituzioni

$$\begin{aligned} k_1 &= \not{p} + (k_1 - \not{p}) \\ k_1 &= (\not{p} - k_2) - (\not{p} - \not{q}) \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} &= - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Tr \left[\gamma^\lambda \gamma_5 \frac{1}{\not{p} - \not{q}} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - \not{k}_1} - \frac{1}{\not{p}} \gamma^\lambda \gamma_5 \frac{1}{\not{p} - \not{q}} \gamma^\nu \right] + Tr \left[\frac{1}{\not{p}} \gamma^\lambda \gamma_5 \frac{1}{\not{p} - \not{q}} \gamma^\nu - \frac{1}{\not{p}} \gamma^\lambda \gamma_5 \frac{1}{\not{p} - \not{k}_2} \gamma^\nu \right] = \\ &= - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Tr \left[\frac{1}{\not{p} - \not{k}_1} \gamma^\lambda \gamma_5 \frac{1}{\not{p} - \not{k}_1 - \not{k}_2} \gamma^\nu - \frac{1}{\not{p}} \gamma^\lambda \gamma_5 \frac{1}{\not{p} - \not{k}_2} \gamma^\nu \right] = \\ &= -(k_1)^\tau \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial p^\tau} Tr \left[\frac{\gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma_5 \gamma^\beta \gamma^\nu}{p^2 (p - k_2)^2} \right] p_\alpha (k_2)_\beta = - \frac{2i\pi^2 (k_1)^\tau}{(2\pi)^4} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p^\tau}{p^2} \left(-4i\epsilon^{\alpha\lambda\beta\nu} \right) p_\alpha (k_2)_\beta = \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \epsilon^{\lambda\nu\alpha\beta} (k_1)_\alpha (k_2)_\beta \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} (k_1)_\mu T^{\mu\nu\lambda}(\beta) &= (k_1)_\mu T^{\mu\nu\lambda}(0) + (k_1)_\mu \frac{\beta}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\alpha} (k_1 - k_2)_\alpha = \frac{1}{8\pi^2} \epsilon^{\lambda\nu\alpha\beta} (k_1)_\alpha (k_2)_\beta + \frac{\beta}{8\pi^2} \epsilon^{\lambda\nu\alpha\beta} (k_1)_\alpha (k_2)_\beta = \\ &= \frac{1 + \beta}{8\pi^2} \epsilon^{\lambda\nu\alpha\beta} (k_1)_\alpha (k_2)_\beta \end{aligned}$$

Vediamo allora che non è possibile soddisfare contemporaneamente le due identità di Slavnov-Taylor, in quanto β dovrebbe essere uguale a 1 per soddisfare la prima, e uguale a -1 per soddisfare la seconda. I termini anomali compaiono per funzioni a tre punti della forma $\langle 0|T\{J_A J_A J_A\}|0\rangle$ ma non per $\langle 0|T\{J J J\}|0\rangle$, per questo solitamente si parla di *anomalia assiale*. Se scegliamo di mantenere la prima identità di Slavnov-Taylor (quella legata alla conservazione della corrente elettromagnetica), allora $\beta = -1$ e l'identità di Ward assiale si scrive come

$$q_\lambda T^{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (k_1)_\alpha (k_2)_\beta$$

Questo corrisponde ad una modifica della divergenza della corrente assiale come

$$\partial_\lambda J_A^\lambda = \frac{1}{(4\pi)^4} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}$$

dove $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ è il tensore del campo elettromagnetico. In generale, e reintroducendo le masse, si può mostrare che il risultato per una teoria con N fermioni, di carica elettrica Q_i , carica assiale Q_i^A e massa m_i , è dato da

$$\partial_\mu J_A^\mu = \sum_{i=1}^N Q_i^2 Q_i^A \left(2im_i J^i + \frac{1}{(4\pi)^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \right)$$

dove

$$J_A^\mu = \sum_{i=1}^N Q_i^A \bar{\psi}_i \gamma^\mu \gamma_5 \psi_i$$

$$J^i = \bar{\psi}_i \gamma_5 \psi_i$$

Osserviamo che questo risultato è indipendente dalla massa delle particelle, infatti è in generale non nullo anche nel caso di $m = 0$, inoltre nel 69 Adler e Bardeen mostrarono che le correzioni radiative ad ordini superiori non contribuiscono al termine anomalo, che quindi rimane. Lo stesso problema poteva essere affrontato in regolarizzazione dimensionale, con la difficoltà aggiuntiva di dover definire la matrice γ_5 in un numero arbitrario di dimensioni. In termini di path integral, infine, la misura d'integrazione non è invariante sotto le trasformazioni generate da γ_5 , e lo jacobiano della trasformazione dà origine proprio al termine anomalo.

1.5.2 Anomalie nel caso non abeliano

Si può mostrare che per una teoria di gauge con simmetria non abeliana anche i loop fermionici con 4 e 5 linee interne contribuiscono all'anomalia, e che il termine anomalo è proporzionale alla quantità

$$Tr \left[\left\{ T^a, T^b \right\}, T^c \right]$$

dove T^a , T^b e T^c sono i generatori del gruppo di gauge. Nel modello standard, i fermioni possono stare in un singoletto oppure in un doppietto di $SU(2)$, pertanto affinché l'anomalia scompaia è necessario che si annullino le seguenti quattro quantità:

$$Tr \left[\left\{ \tau^a, \tau^b \right\}, \tau^c \right]$$

$$Tr \left[\left\{ \tau^a, \tau^b \right\}, Y \right]$$

$$Tr [Y^2 \tau^a]$$

$$Tr [Y^3]$$

dove Y è la matrice di ipercarica. La prima quantità fa chiaramente zero, dato che $\{\tau^a, \tau^b\} = \frac{\delta^{ab}}{2}$ e $Tr[\tau^c] = 0$. Per la seconda quantità, osserviamo che per fermioni right-handed $\tau^a = 0$, dunque si ha

$$Tr \left[\left\{ \tau^a, \tau^b \right\}, Y \right] = \frac{\delta^{ab}}{2} Tr[Y_L]$$

dove Y_L è la matrice di ipercarica ristretta ai fermioni. Ma i fermioni left hanno ipercarica -1 nel caso dei leptoni, e $\frac{1}{3}$ nel caso dei quark, dunque

$$Tr[Y_L] = 2 \times n_l \times (-1) + 2 \times 3 \times n_q \times \left(\frac{1}{3}\right) = 2(n_l - n_q)$$

dove nel secondo addendo abbiamo considerato il contributo di colore per ogni quark; il 2 viceversa è dovuto al fatto che i fermioni left-handed sono doppietti di $SU(2)$.

Per la terza quantità, di nuovo per singoletti $\tau^c = 0$, mentre per entrambe le componenti dei doppietti Y ha lo stesso valore, per cui:

$$Tr[Y^2 \tau^c] \equiv (-1) Tr[\tau^c] = 0$$

Infine, per mostrare che $Tr[Y^3] = 0$, osserviamo che le componenti left e right contribuiscono con segni opposti alla anomalia assiale, infatti

$$J_A^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu(1 + \gamma_5)\psi - \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)\psi$$

Pertanto possiamo scrivere $Tr[Y^3] = Tr[Y_L^3] - Tr[Y_R^3]$, e si ha

$$\begin{aligned} Tr[Y_L^3] &= n_l \times 2 \times (-1)^3 + n_q \times 3 \times 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = -2n_l + \frac{2}{9}n_q \\ Tr[Y_R^3] &= n_l \times (-2)^3 + n_q \times 3 \times \left[\left(\frac{4}{3}\right)^3 + \left(-\frac{2}{3}\right)^3\right] = -8n_l + \frac{56}{9}n_q \\ Tr[Y_L^3] - Tr[Y_R^3] &= 6(n_l - n_q) \end{aligned}$$

Vediamo quindi che se $n_l = n_q$, l'anomalia assiale scompare.

Si può mostrare che le correnti associate con il numero leptonico e il numero barionico

$$\begin{aligned} L^\mu &= \sum_{i=1}^{n_l} (\bar{e}_i\gamma^\mu e_i + \bar{\nu}_i\gamma^\mu \nu_i) \\ B^\mu &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n_q} (\bar{u}_i\gamma^\mu u_i + \bar{d}_i\gamma^\mu d_i) \end{aligned}$$

presentano un contributo anomalo dovuto all'anomalia assiale. Tuttavia, essendo tale contributo lo stesso per entrambe le correnti, in ogni caso la differenza $B - L$ risulta comunque conservata.

1.6 Cronologia del modello standard - Fase pre-LEP

Il modello standard presenta in totale 17 parametri liberi:

- dal settore di gauge abbiamo i due parametri corrispondenti alle costanti di accoppiamento di gauge, g e g' ;
- dal settore di Higgs abbiamo i due parametri v e λ ;
- dal settore di Yukawa per i fermioni abbiamo 3 parametri per le masse dei leptoni, 6 per i quark, e i 4 parametri della matrice CKM.

Nella fase pre-LEP non si avevano macchine con energia sufficiente per osservare interazioni coinvolgenti lo scambio tra i bosoni di gauge. I parametri di input erano la costante di struttura fine α , la costante di Fermi G_F , e il seno dell'angolo di Weinberg $\sin^2 \theta_W$, e tutti gli esperimenti erano volti alla misura di quest'ultimo. Nel limite di bassa energia, ovvero ad energie tali da poter trascurare lo scambio dei bosoni di gauge, possiamo considerare l'interazione come del tipo corrente-corrente. La lagrangiana effettiva si ottiene sviluppando al secondo ordine nelle interazioni la lagrangiana di interazione

$$\mathcal{L}_{int} = gJ_\mu^i W_i^\mu + \frac{g'}{2} J_\mu^Y Y^\mu = g(J_\mu^1 W_1^\mu + J_\mu^2 W_2^\mu) + \frac{g}{\cos \theta_W} J_\mu^Z Z^\mu + eJ_\mu^{em} A^\mu$$

$$\mathcal{L}_{eff} \sim \frac{1}{2} \mathcal{L}_{int} \otimes \mathcal{L}_{int}$$

In questo limite si può sostituire al propagatore dei bosoni vettori una delta di Dirac per l'inverso della massa al quadrato del rispettivo bosone, ottenendo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} &= \frac{1}{2} \frac{g^2}{M_W^2} \sum_{i=1}^2 J_\mu^i J_i^\mu + \frac{1}{2} \frac{g^2}{\cos^2 \theta_W M_Z^2} J_\mu^Z J_Z^\mu + e J_\mu^{em} A^\mu = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} J_\mu^{(+)} J_{(-)}^\mu + \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \frac{m_W^2}{\cos^2 \theta_W m_Z^2} J_\mu^Z J_Z^\mu + e J_\mu^{em} A^\mu \equiv \\ &\equiv \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \left(J_\mu^{(+)} J_{(-)}^\mu + \rho J_\mu^Z J_Z^\mu \right) + e J_\mu^{em} A^\mu \end{aligned}$$

dove

$$J_{(+)}^\mu = J_1^\mu + i J_2^\mu$$

$$\rho = \frac{m_W^2}{\cos^2 \theta_W m_Z^2}$$

1.6.1 La simmetria custodial

Nel modello standard, e a livello albero, risulta che $\rho = 1$: questo significa che le interazioni corrente-corrente per la parte carica e per la parte neutra hanno stesso coefficiente, e dunque stesso peso. Sperimentalmente questo è ben verificato e si ha $\rho = 1.0047 \pm 0.0022$. A livello di costruzione teorica, il fatto che ρ sia uguale a 1 è legato alla struttura del settore di Higgs, poichè esso genera le masse dei bosoni: in particolare, è legato alla nostra scelta di utilizzare un settore scalare che sia un doppietto per $SU(2)$; si può mostrare infatti che se il campo Φ appartiene alla rappresentazione di spin t di $SU(2)$ (dove $T^2 = t(t+1)$), allora si ha

$$m_W^2 = \frac{g}{2} [t(t+1) - t_3^2] v^2$$

$$m_Z^2 = (g^2 + (g')^2) t_3^2 v^2$$

e in generale $\rho \neq 1$. Dunque, mentre gli esperimenti a basse energie con le correnti cariche ci permettono di determinare la costante di Fermi, gli studi degli accoppiamenti neutri ci permettono sia di determinare il valore di $\sin^2 \theta_W$, sia di capire a quale rappresentazione di $SU(2)$ appartiene il campo di Higgs. In ogni caso, nel caso del modello standard $\rho = 1$, e se ricordiamo che la corrente J_Z ha questa forma:

$$J_Z^\mu = J_3^\mu - \sin^2 \theta_W J_{em}^\mu$$

la lagrangiana diventa

$$\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \left((J_1)^2 + (J_2)^2 + (J_3 - \sin^2 \theta_W J_{em})^2 \right) + e J_\mu^{em} A^\mu$$

Se $\theta_W = 0$, tale lagrangiana presenta una simmetria sotto $SU(2)$, detta *simmetria custodial*. Tale simmetria è presente anche al livello di lagrangiana completa, infatti se consideriamo il potenziale di Higgs $V(\Phi)$:

$$V(\Phi) = \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2$$

questo è invariante sotto una simmetria più grande della semplice $SU(2) \otimes U(1)$. Consideriamo la seguente matrice:

$$M = \begin{pmatrix} \phi^+ & \phi_0^* \\ \phi_0 & -\phi^- \end{pmatrix}$$

allora il potenziale può essere scritto come

$$V(M) = \frac{\mu^2}{2} \text{Tr}[M^\dagger M] + \frac{\lambda}{4} \text{Tr}[M^\dagger M]^2$$

In termini di M , il potenziale così scritto è invariante sotto la trasformazione biunitaria

$$M \rightarrow U M V^\dagger \quad U, V \in SU(2)$$

e poichè le due matrici U, V sono indipendenti, il gruppo di simmetria totale del potenziale risulta essere $SU(2) \otimes SU(2)$. Il termine cinetico però non è altrettanto docile: sebbene si abbia

$$\frac{1}{2} \text{Tr}[\partial_\mu M^\dagger \partial^\mu M] = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi$$

non possiamo sostituire la derivata con la derivata covariante, perchè si ha

$$\frac{1}{2} \text{Tr}[(D_\mu M)^\dagger D^\mu M] \neq (D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi$$

É possibile capire intuitivamente perchè questo avviene, osservando che il doppietto (ϕ^+, ϕ_0) ha ipercarica 1 mentre il doppietto (ϕ_0^*, ϕ^-) ha ipercarica -1 , dunque le derivate covarianti saranno diverse nei due casi; possiamo concludere quindi che la simmetria $SU(2) \otimes SU(2)$ risulta rotta dalla interazione di ipercarica. Trascuriamo per il momento l'ipercarica, dunque la lagrangiana presenta una simmetria sotto $SU(2) \otimes SU(2)$: poichè $SU(2)_L$ è spontaneamente rotta, il vuoto non è invariante sotto $SU(2) \otimes SU(2)$, ma resta una simmetria residua $\sim SU(2)$, appunto l' $SU(2)$ custodial.

Per capire come l' $SU(2)$ custodial sia legata al parametro ρ , osserviamo che la lagrangiana di massa dopo l'inclusione delle correzioni radiative si scrive in generale come

$$\frac{1}{2} m_W^2 (W_\mu^1 W_1^\mu + W_\mu^2 W_2^\mu) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & Y_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M^2 & (M')^2 \\ (M')^2 & (M'')^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_3^\mu \\ Y^\mu \end{pmatrix}$$

Affinchè il campo del fotone resti massless, è necessario che $M^2 (M'')^2 = (M')^4$, e di conseguenza l'autovalore non banale $M^2 + (M'')^2$ corrisponda a m_Z^2 . Se la matrice di massa è diagonalizzata dalla rotazione di un angolo θ_W , risulterà

$$\tan \theta_W = \frac{\sqrt{m_Z^2 - M^2}}{M}$$

e dunque

$$\rho = \frac{m_W^2}{m_Z^2 \cos^2 \theta_W} = \frac{m_W^2}{M^2}$$

dunque $\rho = 1$ solo se $M = m_W$. Ma la simmetria $SU(2)$ custodial fa sì che l'unico termine di massa permesso sia della forma

$$W_\mu^1 W_1^\mu + W_\mu^2 W_2^\mu + W_\mu^3 W_3^\mu \equiv 2W_\mu^{(+)} W_{(+)}^\mu + W_\mu^3 W_3^\mu$$

ovvero un prodotto scalare in $SU(2)$: questo implica che i campi W_1, W_2 e W_3 abbiano la stessa massa, ovvero $m_W = M$ nelle nostre notazioni, da cui $\rho = 1$.

Dunque abbiamo dato conto da un punto di vista teorico del perchè il valore misurato di ρ si discosta così poco da 1: la simmetria $SU(2)$ custodial è soltanto debolmente rotta dall'accoppiamento di ipercarica, e dai termini di massa per i fermioni (altra sorgente di rottura della simmetria custodial). Ci aspettiamo quindi termini di correzione dell'ordine di $G_\mu m_f^2$, infatti da un conto più accurato si ottiene:

$$\rho \simeq 1 + \frac{3G_\mu m_t^2}{8\pi^2 \sqrt{2}}$$

dove m_t è la massa del top, che fornisce il contributo più consistente.

1.6.2 Fine tuning e massa dell'Higgs

Un problema del settore di Higgs del modello standard è dato dai limiti sia teorici che sperimentali alla sua massa.

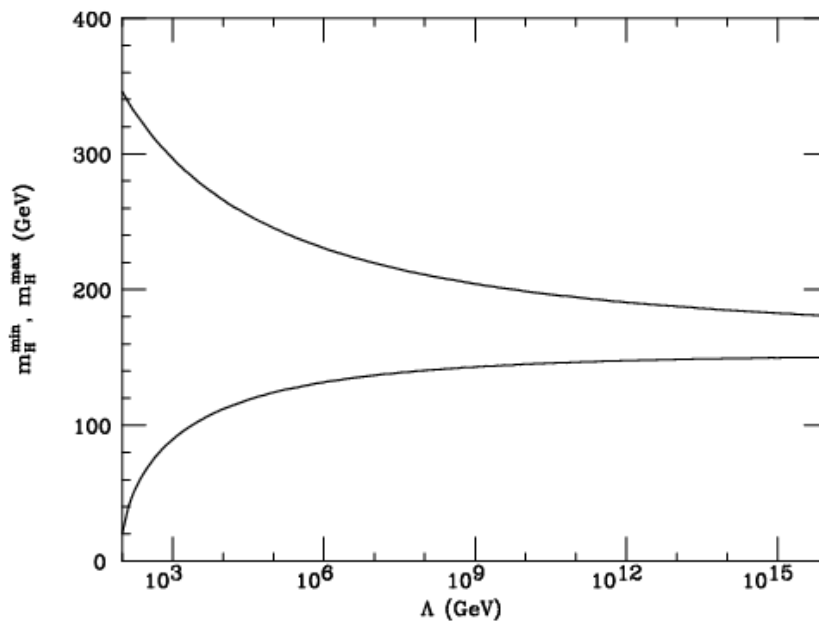
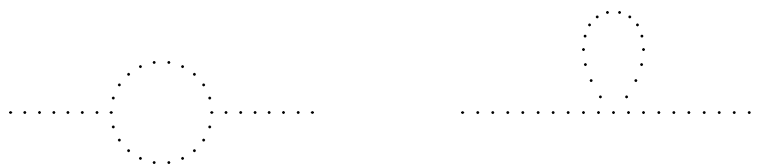


Figura 1.3: Limiti teorici alla massa dell'Higgs

Essendo una particella scalare, l'Higgs riceve correzioni radiative alla sua massa da grafici di questo tipo:



Il secondo grafico in particolare è quello che dà più problemi, perchè presenta una divergenza quadratica; in ogni caso la teoria è rinormalizzabile dunque tale divergenza non rappresenterà un problema di per sè,

tuttavia essendo quadratica il suo contributo cresce significativamente in funzione del cutoff. Supponiamo infatti di voler considerare il modello standard come una teoria effettiva, valida soltanto fino alle energie a cui diventano importanti le interazioni gravitazionali, cioè energie dell'ordine della massa di Planck, $\Lambda \sim 10^{19} GeV$: questo significa che gli impulsi nei loop potranno assumere tutti valori fino alla massa di Planck, portando a un contributo del tadpole dell'ordine di Λ^2 . Il controtermine dovrà essere dello stesso ordine, ma la sua sottrazione dovrà lasciare un residuo di molti ordini di grandezza inferiore, dovendo essere dell'ordine del centinaio di GeV : è il cosiddetto problema del *fine tuning*, o delle regolazioni fini. Il fine tuning da un punto di vista teorico formale non comporta nessun problema, in quanto la teoria è rinormalizzabile e la sottrazione di un controtermine comunque elevato è perfettamente lecita, ma dal punto di vista concettuale il punto cruciale è il perchè la differenza tra due valori così elevati debba dare come risultato un valore così piccolo e preciso. Se richiediamo che il modello standard sia valido fino ad una certa scala di energia, otteniamo un certo range di valori entro cui può trovarsi la massa dell'Higgs, e variando la scala si ottiene il grafico in figura 1.3: vediamo dunque che via via che il cutoff cresce la massa dell'Higgs è sempre più vincolata a trovarsi intorno ai $200 GeV$. Osserviamo comunque che essendo la simmetria rotta mediante una teoria del tipo $\lambda\Phi^4$, la costante running $\lambda(\Lambda)$ va a zero a grandi impulsi, dunque il potenziale iniziale perde le caratteristiche per cui lo avevamo introdotto, e si parla di *trivialità della teoria*.

1.6.3 Misura di $\sin^2 \theta_W$

Il primo tentativo di verifica delle predizioni del modello standard fu la misura di $\sin^2 \theta_W$: dalla interazione carica si ha una misura di G_F , viceversa la corrente neutra è definita come

$$J_Z^\mu = J_3^\mu - \sin^2 \theta_W J_{em}^\mu$$

dove

$$J_3^\mu = \sum_f \frac{\tau_3^f}{2} \bar{f}_L \gamma^\mu f_L$$

$$J_{em}^\mu = Q_f (\bar{f}_L \gamma^\mu f_L + \bar{f}_R \gamma^\mu f_R)$$

Possiamo riscriverla in maniera da isolare le componenti left e right:

$$J_Z^\mu = \sum_f \left(\frac{\tau_3^f}{2} - \sin^2 \theta_W Q_f \right) \bar{f}_L \gamma^\mu f_L - \sin^2 \theta_W Q_f \bar{f}_R \gamma^\mu f_R \equiv \sum_f g_L^f \bar{f}_L \gamma^\mu f_L + g_R^f \bar{f}_R \gamma^\mu f_R$$

dove

$$g_L^f = \left(\frac{\tau_3^f}{2} - \sin^2 \theta_W Q_f \right)$$

$$g_R = -\sin^2 \theta_W Q_f$$

In precedenza avevamo espresso la corrente come

$$J_\mu^Z = \sum_f \frac{\tau_3^f}{2} \bar{f} \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} f - Q_f \sin^2 \theta_W \bar{f} \gamma^\mu f = \frac{1}{2} \sum_f \left(\frac{\tau_3^f}{2} - 2Q_f \sin^2 \theta_W \right) \bar{f} \gamma^\mu f - \frac{\tau_3^f}{2} \bar{f} \gamma^\mu \gamma_5 f \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2} \sum_f c_V^f \bar{f} \gamma^\mu f - c_A^f \bar{f} \gamma^\mu \gamma_5 f$$

dove

$$c_V^f = \frac{\tau_3^f}{2} - 2Q_f \sin^2 \theta_W$$

$$c_A^f = \frac{\tau_3^f}{2}$$

Possiamo quindi esprimere c_V^f e c_A^f in funzione di g_L^f e g_R^f :

$$c_V^f = g_L^f + g_R^f$$

$$c_A^f = g_L^f - g_R^f$$

Lo scattering elastico $\nu_\mu e$

I processi d'oro per la misura di $\sin^2 \theta_W$ sono gli scattering tra elettroni e neutrini appartenenti ad altre famiglie, poichè il neutrino è scarico e quindi al processo contribuisce soltanto lo scambio del bosone neutro. Mediante scattering di protoni su materia si producevano fasci di pioni e kaoni, che a loro volta decadevano in muoni e neutrini muonici: i muoni venivano deflessi da opportuni campi magnetici, mentre i neutrini erano convogliati in fasci e diretti su una targhetta di elettroni. Considereremo i seguenti due processi:

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$$

$$\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-$$



Per la conservazione del numero leptonico, lo Z può essere scambiato soltanto nel canale t . L'ampiezza per lo scattering è

$$\mathcal{M} = \frac{g^2}{m_Z^2 \cos^2 \theta_W} \frac{1}{2} [g_L^\nu \bar{u}(k') \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(k)] \frac{1}{2} [g_L^e \bar{u}(p') \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p) + g_R^e \bar{u}(p') \gamma^\mu (1 + \gamma_5) u(p)]$$

Prendendo il modulo quadro dell'ampiezza, il termine di interferenza è nullo, in quanto avrebbe la forma

$$\not{p}' \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \not{p} \gamma^\nu (1 + \gamma_5) = \not{p}' \gamma^\mu (1 - \gamma_5) (1 + \gamma_5) \not{p} \gamma^\nu = 4 \not{p}' \gamma^\mu \chi_- \chi_+ \not{p} \gamma^\nu = 0$$

dunque rimane

$$\frac{1}{2s_e + 1} |\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{g^2}{4m_Z^2 \cos^2 \theta_W} \right)^2 (g_L^\nu)^2 \cdot 8 \cdot [(k')^\mu k^\nu + (k')^\nu k^\mu - g^{\mu\nu} (k \cdot k') + i \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} (k')_\alpha k_\beta]$$

$$\begin{aligned}
& \cdot 8 \cdot [(g_L^e)^2 ((p')_\mu p_\nu + (p')_\nu k_\mu - g_{\mu\nu}(p \cdot p') + i\epsilon_{\rho\mu\sigma\nu}(p')^\rho p^\sigma) + (g_R^e)^2 ((p')_\mu p_\nu + (p')_\nu k_\mu - g_{\mu\nu}(p \cdot p') - i\epsilon_{\rho\mu\sigma\nu}(p')^\rho p^\sigma)] = \\
& = \left(\frac{g^2}{m_Z^2 \cos^2 \theta_W} \right)^2 (g_L^\nu)^2 8 [(g_L^e)^2 (k' \cdot p')(k \cdot p) + (g_R^e)^2 (k' \cdot p)(k \cdot p')] = \\
& = \left(\frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{8m_W^2}{\cos^2 \theta_W m_Z^2} \right)^2 (g_L^\nu)^2 8 [(g_L^e)^2 (k' \cdot p')(k \cdot p) + (g_R^e)^2 (k' \cdot p)(k \cdot p')] = \\
& = (16G_F)^2 (g_L^\nu)^2 [(g_L^e)^2 (k' \cdot p')(k \cdot p) + (g_R^e)^2 (k' \cdot p)(k \cdot p')]
\end{aligned}$$

dove abbiamo trascurato le masse degli elettroni. A questo punto la sezione d'urto differenziale si ottiene da

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{1}{32\pi} \frac{1}{s} \left(\frac{1}{2} |\mathcal{M}|^2 \right)$$

ma al solito $k \cdot p = \frac{s}{2}$ e $k' \cdot p = -\frac{u}{2}$, dunque

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{(16G_F)^2 (g_L^\nu)^2}{32\pi} \frac{1}{s} \frac{1}{4} [(g_L^e)^2 s^2 + (g_R^e)^2 s^2 (1 + \cos\theta)^2]$$

da cui la sezione d'urto totale

$$\sigma_{tot} = \frac{(8G_F)^2 (g_L^\nu)^2}{32\pi} s \left[2(g_L^e)^2 + \frac{2}{3}(g_R^e)^2 \right] = \frac{4G_F^2 s}{\pi} (g_L^\nu)^2 \left[(g_L^e)^2 + \frac{1}{3}(g_R^e)^2 \right]$$

ma poichè l'elettrone è fermo, $s = (E_\nu + m_e)^2 \sim 2E_\nu m_e$, dunque

$$\sigma_{tot}(e\nu_\mu \rightarrow e\nu_\mu) = \frac{8G_F^2 m_e E_\nu}{\pi} (g_L^\nu)^2 \left[(g_L^e)^2 + \frac{1}{3}(g_R^e)^2 \right]$$

Per lo scattering con l'antineutrino si ottiene un risultato analogo, solo che stavolta la traccia relativa all'antineutrino ha la forma

$$2Tr [k' \gamma^\mu (1 + \gamma_5) k \gamma^\nu] = 2 [(k')^\mu k^\nu + (k')^\nu k^\mu - g^{\mu\nu}(k' \cdot k) - i\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu}(k')_\alpha k_\beta]$$

dunque il contributo proporzionale a u corrisponde a g_L^e e non a g_R^e :

$$\sigma_{tot}(e\bar{\nu}_\mu \rightarrow e\bar{\nu}_\mu) = \frac{8G_F^2 m_e E_{\bar{\nu}}}{\pi} (g_L^\nu)^2 \left[\frac{1}{3}(g_L^e)^2 + (g_R^e)^2 \right]$$

Ricordando la forma per c_V^e e c_A^e , possiamo scrivere

$$\sigma_{tot}(e\nu_\mu \rightarrow e\nu_\mu) = \frac{2G_F^2 m_e E_\nu}{3\pi} (g_L^\nu)^2 [(c_V^e)^2 + (c_A^e)^2 + (c_V^e)(c_A^e)]$$

$$\sigma_{tot}(e\bar{\nu}_\mu \rightarrow e\bar{\nu}_\mu) = \frac{2G_F^2 m_e E_{\bar{\nu}}}{3\pi} (g_L^\nu)^2 [(c_V^e)^2 + (c_A^e)^2 - (c_V^e)(c_A^e)]$$

Il rapporto tra la sezione d'urto e l'energia del neutrino è circa

$$\frac{\sigma_{\nu e}}{E_\nu} \sim 1.6 \cdot 10^{-9} \frac{nb}{GeV}$$

Per lo scattering $\bar{\nu}e$ la sezione d'urto è un pò più piccola, $\sim 1.3 \cdot 10^{-9} \frac{nb}{GeV}$. Se assumiamo per il neutrino $g_L^\nu = \frac{1}{2}$ come predetto dal modello standard, abbiamo

$$1.6 \cdot 10^{-9} \frac{nb}{GeV} = \frac{2G_F^2 m_e}{3\pi} [(c_V^e)^2 + (c_A^e)^2 - (c_V^e)(c_A^e)] \sim 5.8 \cdot 10^{-9} \frac{nb}{GeV} [(c_V^e)^2 + (c_A^e)^2 - (c_V^e)(c_A^e)]$$

dunque

$$[(c_V^e)^2 + (c_A^e)^2 + (c_V^e)(c_A^e)] = 0.28$$

Un risultato analogo si ottiene per lo scattering $\bar{\nu}e$:

$$[(c_V^e)^2 + (c_A^e)^2 - (c_V^e)(c_A^e)] = 0.28$$

Se mettiamo in grafico in funzione di c_V e c_A otteniamo delle ellissi:

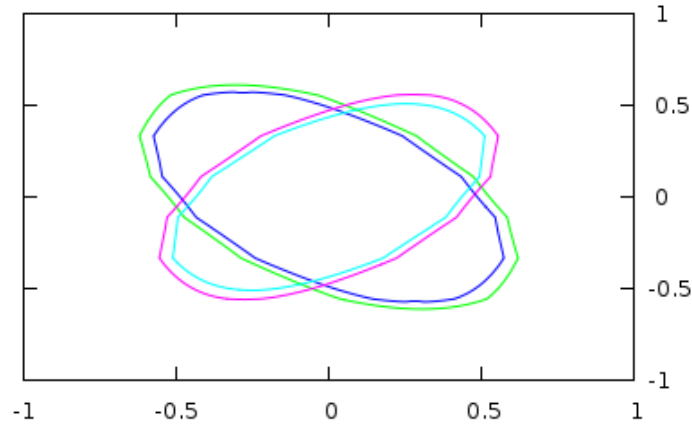


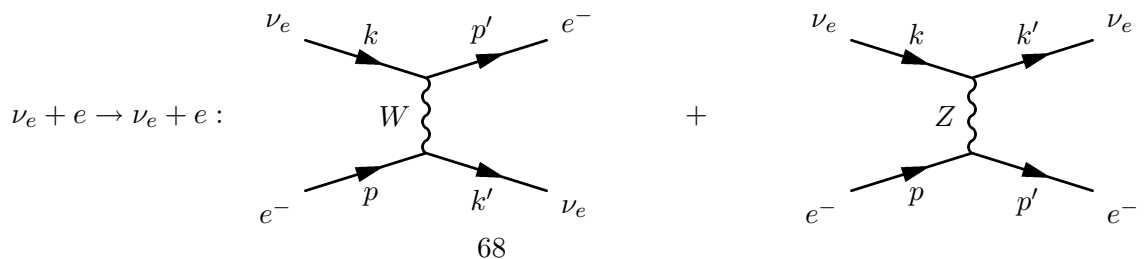
Figura 1.4: valori possibili di c_V e c_A : *blu-verde: $\nu+e$*
celeste-viola: $\bar{\nu}+e$

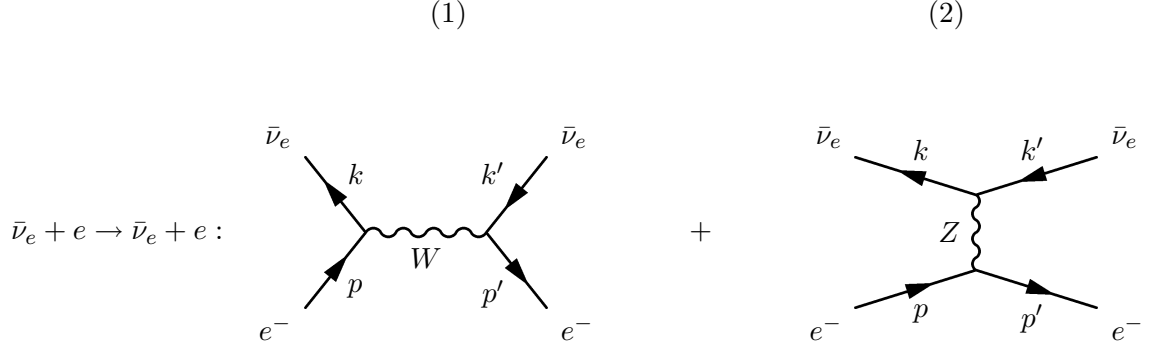
Vediamo quindi che ci sono quattro possibili regioni, corrispondenti all'invarianza del risultato sotto le trasformazioni

$$\begin{aligned} g_L^2 &\rightarrow -g_L^e ; & g_R^2 &\rightarrow -g_R^e \\ g_L^2 &\rightarrow g_L^e ; & g_R^2 &\rightarrow -g_R^e \end{aligned}$$

Lo scattering elastico $\nu_e e$

Per capire qual'è effettivamente la regione giusta, abbiamo bisogno di altre due misure indipendenti, ad esempio gli scattering $e^- + \nu_e \rightarrow e^- + \nu_e$ e $e^- + \bar{\nu}_e \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$, in cui può essere scambiato anche un bosone carico nel canale u :





Scriviamo ad esempio l'ampiezza per il diagramma (1):

$$\mathcal{M}^{(1)} = -\frac{g^2}{8m_W^2} [\bar{u}(k')\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(p)] [\bar{u}(p')\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(k)]$$

Osserviamo che a questo processo partecipano soltanto elettroni left-handed. Per il diagramma (2) l'ampiezza è invece

$$\mathcal{M}^{(2)} = -\frac{g^2}{4\cos^2\theta_W m_Z^2} [\bar{u}(k')\gamma^\mu(c_V^\nu - c_A^\nu\gamma_5)u(k)] [\bar{u}(p')\gamma^\mu(c_V^e - c_A^e\gamma_5)u(p)]$$

Ricordando che per il neutrino $c_V^\nu = c_A^\nu = \frac{1}{2}$, e che per l'elettrone $c_V^e = -\frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_W$ e $c_A^e = -\frac{1}{2}$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(1)} + \mathcal{M}^{(2)} = & -\frac{g^2}{8m_W^2} \left\{ [\bar{u}(k')\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(p)] [\bar{u}(p')\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(k)] - \right. \\ & \left. -\frac{1}{2} [\bar{u}(k')\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(k)] [\bar{u}(p')\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(p)] - 4\sin^2\theta_W \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) \right\} \end{aligned}$$

Utilizzeremo adesso quello che va sotto il nome di *riarrangiamento di Fierz*, per riscrivere il primo termine:

$$[\gamma_5(1-\gamma_5)]_{\alpha\beta} [\gamma_5(1-\gamma_5)]_{\gamma\delta} = -[\gamma_5(1-\gamma_5)]_{\alpha\delta} [\gamma_5(1-\gamma_5)]_{\gamma\beta}$$

da cui

$$[\bar{u}(k')\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(p)] [\bar{u}(p')\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(k)] = [\bar{u}(k')\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(k)] [\bar{u}(p')\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(p)]$$

Questo perchè nel riarrangiare gli spinori facciamo un numero dispari di permutazioni, il che porta un -1 aggiuntivo. Questo trucco ci permette di riscrivere la somma delle due ampiezze come

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(1)} + \mathcal{M}^{(2)} = & -\frac{g^2}{8m_W^2} \left\{ [\bar{u}(k')\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(k)] \left[\frac{1}{2}\bar{u}(p')\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(p) + 2\sin^2\theta_W \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) \right] \right\} = \\ = & -\frac{g^2}{4m_W^2} \left\{ [\bar{u}(k')\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(k)] \left[\left(\frac{1}{2} + \sin^2\theta_W \right) \bar{u}_L(p')\gamma^\mu u_L(p) + \sin^2\theta_W \bar{u}_R(p')\gamma^\mu u_R(p) \right] \right\} \end{aligned}$$

Ricordando che $g_V^e = -\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W$, e che $g_R^e = \sin^2 \theta$, abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(1)} + \mathcal{M}^{(2)} &= -\frac{g^2}{4m_W^2} \{ [\bar{u}(k')\gamma^\mu(1 - \gamma_5)u(k)] [g_L^e \bar{u}_L(p')\gamma^\mu u_L(p) + g_R^e \bar{u}_R(p')\gamma^\mu u_R(p)] \} = \\ &= -\frac{g^2}{4m_W^2} (g_L^e) [\bar{u}(k')\gamma^\mu(1 - \gamma_5)u(k)] [g_L^e \bar{u}(p')\gamma^\mu(1 - \gamma_5)u(p) + g_R^e \bar{u}(p')\gamma^\mu(1 + \gamma_5)u(p)] \end{aligned}$$

dove abbiamo riassorbito un fattore $\frac{1}{2}$ nel coefficiente g_L^e .

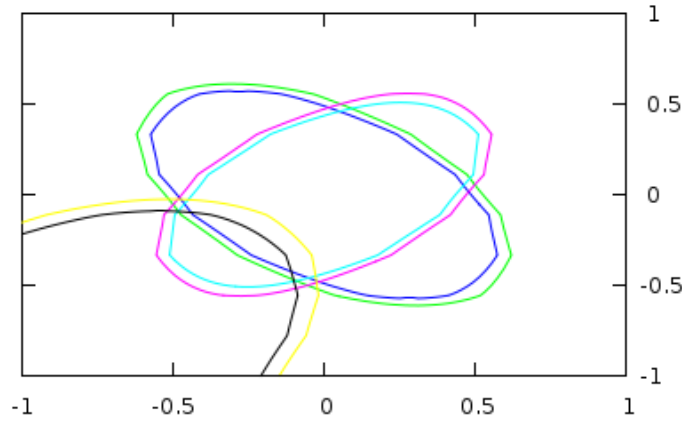


Figura 1.5: Intersezioni dovute allo scattering $\bar{\nu}_e e$

Dunque c'è completa analogia col calcolo precedente, a patto di sostituire g_L^e con $1 + g_L^e$; la sezione d'urto sarà data da:

$$\sigma(\nu_e e \rightarrow \nu_e e) = \frac{2G_F^2 m_e}{3\pi} [3 + (c_V^e)^2 + (c_A^e)^2 + 3(c_V^e + c_A^e) + (c_V^e)(c_A^e)]$$

e si può dimostrare che per lo scattering $\bar{\nu}_e e$ si ottiene un risultato analogo:

$$\sigma(\bar{\nu}_e e \rightarrow \bar{\nu}_e e) = \frac{2G_F^2 m_e}{3\pi} [1 + (c_V^e)^2 + (c_A^e)^2 + 3(c_V^e + c_A^e) - (c_V^e)(c_A^e)]$$

anche se è più difficile ottenere il processo corrispondente: infatti lo scattering $\bar{\nu}_e e$ si ottiene sfruttando gli antineutrini prodotti all'interno dei reattori nucleari, ma non si ha una sorgente identicamente copiosa di neutrini elettronici. In ogni caso la sezione d'urto per lo scattering $\bar{\nu}_e e$ è $\sim 4 \cdot 10^{-9} \frac{nb}{GeV}$: da questo valore ricaviamo un'altra ellisse nel piano $c_V - c_A$, che interseca le precedenti in due dei quattro punti trovati in precedenza (figura 1.5).

Sezioni d'urto polarizzate e forward-backward asymmetry

Consideriamo il processo di annichilazione $e^+ e^- \rightarrow f \bar{f}$:



Vediamo dunque che nel canale s possiamo scambiare un fotone oppure uno Z ; in realtà esisterebbe anche il grafico con scambio dell'Higgs ma essendo proporzionale al rapporto $\frac{m_f}{m_H}$ esso è molto depresso rispetto agli altri.

Sempre in era pre-LEP, i vari acceleratori e^+e^- (ad esempio SLAC) potevano raggiungere energie nel sistema del centro di massa intorno ai $30-50\text{GeV}$: queste energie sono ancora minori della massa dello Z , ma ci possiamo aspettare che il termine di interferenza tra l'ampiezza con scambio del fotone e quella con scambio dello Z conti qualcosa. Infatti, l'ampiezza per il fotone è

$$\mathcal{M}_{QED} \sim \frac{\alpha}{s}$$

mentre quella per lo Z

$$\mathcal{M}_Z \sim \frac{e^2}{m_Z^2}$$

Dunque il termine di interferenza contribuirà per una frazione intorno al 30%, infatti il rapporto

$$\frac{\mathcal{M}_{QED}\mathcal{M}_Z}{\mathcal{M}_{QED}^2} = \frac{\mathcal{M}_Z}{\mathcal{M}_{QED}} = \frac{s}{M_Z^2} \sim \left(\frac{30-50\text{GeV}}{90\text{GeV}}\right)^2 \sim 10-30\%$$

Nello studio dell'annichilazione $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$ sono molto utili le sezioni d'urto polarizzate, ovvero sezioni d'urto in cui si considera una polarizzazione ben definita per gli elettroni e per i fermioni uscenti. Le sezioni d'urto polarizzate diventano molto importanti soprattutto nel caso in cui i fermioni in esame siano leggeri, infatti nel limite $m \rightarrow 0$ l'elicità diventa un buon numero quantico: in questo caso la polarizzazione dell'elettrone vincola quella del positrone e viceversa, e analogamente per i fermioni uscenti. Abbiamo quattro ampiezze possibili, a seconda di come scegliamo la polarizzazione dell'elettrone entrante e del fermione uscente: \mathcal{M}_{LL} , \mathcal{M}_{LR} , \mathcal{M}_{RL} , \mathcal{M}_{RR} . Queste quattro ampiezze, nel limite di massa nulla, non interferiscono tra loro proprio grazie alla conservazione dell'elicità: ovviamente nel caso di massa non nulla, queste considerazioni sono tanto più errate quanto più grandi sono le masse, essendo la violazione dell'elicità proporzionale ad esse.

L'ampiezza per lo scambio del fotone ha questa forma

$$\mathcal{M}_{QED} = i\frac{e^2}{q^2}\bar{v}(k)\gamma^\alpha u(p)\bar{u}(p')\gamma_\alpha v(k')$$

Viceversa, l'ampiezza per lo scambio dello Z :

$$\mathcal{M}_Z = -\frac{g^2}{4 \cos^2 \theta_W} [\bar{v}(k) \gamma^\alpha (c_V^e - c_A^e \gamma_5) u(p)] \frac{-i \left(g_{\alpha\beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{m_Z^2} \right)}{q^2 - m_Z^2} \left[\bar{u}(p') \gamma^\beta (c_V^f - c_A^f \gamma_5) v(k') \right]$$

Considereremo da adesso in poi $f \equiv \mu$: in questo caso, per l'universalità degli accoppiamenti dello Z ai leptoni delle varie famiglie, risulta che $c_V^e = c_V^\mu$ e $c_A^e = c_A^\mu$. Inoltre, se consideriamo massless le particelle in gioco e ricordiamo che $q = p + k$, il termine

$$[\bar{v}(k) \gamma^\alpha (c_V^e - c_A^e \gamma_5) u(p)] q_\alpha q_\beta \left[\bar{u}(p') \gamma^\beta (c_V^f - c_A^f \gamma_5) v(k') \right] = [\bar{v}(k) \not{q} (c_V^e - c_A^e \gamma_5) u(p)] \left[\bar{u}(p') \not{q} (c_V^f - c_A^f \gamma_5) v(k') \right]$$

si annulla per le equazioni del moto. Riscrivendo l'ampiezza in termini di $g_L = \frac{c_V + c_A}{2}$ e $g_R = \frac{c_V - c_A}{2}$ (**N.B.:** ovviamente l'Halzen-Martin usa $g_L = c_V + c_A$ e $g_R = c_V - c_A$), si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_Z &= \frac{i}{q^2 - m_Z^2} \frac{g^2}{4 \cos^2 \theta_W} \left[\bar{v}(k) \gamma^\alpha \left(\frac{g_L^e + g_R^e}{2} - \frac{g_L^e - g_R^e}{2} \gamma_5 \right) u(p) \right] \left[\bar{u}(p') \gamma_\alpha \left(\frac{g_L^\mu + g_R^\mu}{2} - \frac{g_L^\mu - g_R^\mu}{2} \gamma_5 \right) v(k') \right] = \\ &= \frac{i\sqrt{2}G_F m_Z^2}{q^2 - m_Z^2} [g_L^e \bar{v}_L(k) \gamma^\alpha u_L(p) + g_R^e \bar{v}_R(k) \gamma^\alpha u_R(p)] [g_L^\mu \bar{u}_L(p') \gamma_\alpha u_L(k') + g_R^\mu \bar{u}_R(p') \gamma_\alpha u_R(k')] \end{aligned}$$

Se consideriamo elicità definite per l'elettrone e il muone, ad esempio l'elettrone right-handed e il muone left-handed, abbiamo:

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_Z)_{RL} &= \frac{i\sqrt{2}G_F m_Z^2}{q^2 - m_Z^2} g_R^e g_L^\mu [\bar{v}_R(k) \gamma^\alpha u_R(p)] [\bar{v}_L(p') \gamma_\alpha u_L(k')] \\ (\mathcal{M}_\gamma)_{RL} + (\mathcal{M}_Z)_{RL} &= i \left(\frac{e^2}{q^2} + \frac{\sqrt{2}G_F m_Z^2}{q^2 - m_Z^2} g_R^e g_L^\mu \right) [\bar{v}_R(k) \gamma^\alpha u_R(p)] [\bar{v}_L(p') \gamma_\alpha u_L(k')] = \\ &= i \frac{e^2}{q^2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}G_F m_Z^2}{q^2 - m_Z^2} \frac{q^2}{e^2} g_R^e g_L^\mu \right) [\bar{v}_R(k) \gamma^\alpha u_R(p)] [\bar{v}_L(p') \gamma_\alpha u_L(k')] \end{aligned}$$

Possiamo definire il parametro

$$r = \frac{\sqrt{2}G_F m_Z^2}{q^2 - m_Z^2} \frac{q^2}{e^2}$$

dove abbiamo aggiunto al denominatore un termine regolarizzatore per il propagatore della Z , importante per energie vicine alla massa M_Z : Γ_Z infatti è la larghezza di decadimento della Z , e questa rappresentazione del propagatore viene detta *rappresentazione di Breit-Wigner*. Prendendo il modulo quadro dell'ampiezza:

$$\begin{aligned} |(\mathcal{M}_\gamma)_{RL} + (\mathcal{M}_Z)_{RL}|^2 &= \left(\frac{e^2}{q^2} \right)^2 |1 + r g_R^e g_L^\mu|^2 4 [2(k \cdot p')(p \cdot k') + 2(k \cdot k')(p \cdot p') - \\ &- 2((k \cdot p')(p \cdot k') - (k \cdot k')(p \cdot p'))] = (4\pi)^2 \frac{\alpha^2}{s^2} |1 + r g_R^e g_L^\mu|^2 4 [(k \cdot k')(p \cdot p')] = \\ &= (4\pi)^2 \frac{\alpha^2}{s^2} |1 + r g_R^e g_L^\mu|^2 s^2 [1 - \cos \theta]^2 \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la formula

$$|\bar{u}_L(p)\gamma^\mu u_L(k)|^2 = \frac{1}{4} |\bar{u}(p)\gamma^\mu(1 - \gamma_5)u(k)|^2 = 2[p^\mu k^\nu + p^\nu k^\mu - g^{\mu\nu}(p \cdot k) + i\epsilon^{\rho\mu\sigma\nu}p_\rho k_\sigma]$$

La sezione d'urto nel centro di massa

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{RL} = \frac{1}{64\pi^2 s} |(\mathcal{M}_\gamma)_{RL} + (\mathcal{M}_Z)_{RL}|^2 = \frac{\alpha^2}{4s} |1 + r g_R^e g_L^\mu|^2 [1 - \cos\theta]^2 \equiv \frac{\alpha^2}{4s} |\epsilon_{RL}|^2 [1 - \cos\theta]^2$$

dove osserviamo che essendo una sezione d'urto polarizzata non si media sugli spin iniziali. Analogamente si può mostrare che per le altre ampiezze si ha

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{LR} &= \frac{\alpha^2}{4s} |1 + r g_L^e g_R^\mu|^2 [1 - \cos\theta]^2 \equiv \frac{\alpha^2}{4s} |\epsilon_{LR}|^2 [1 - \cos\theta]^2 \\ \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{LL} &= \frac{\alpha^2}{4s} |1 + r g_L^e g_R^\mu|^2 [1 - \cos\theta]^2 \equiv \frac{\alpha^2}{4s} |\epsilon_{LL}|^2 [1 - \cos\theta]^2 \\ \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{RR} &= \frac{\alpha^2}{4s} |1 + r g_L^e g_R^\mu|^2 [1 + \cos\theta]^2 \equiv \frac{\alpha^2}{4s} |\epsilon_{RR}|^2 [1 + \cos\theta]^2 \end{aligned}$$

Il segno di differenza tra le ampiezze LL , RR e quelle miste è dovuto al fatto che nel primo caso sopravvive il canale $u = -\frac{s}{2}(1 + \cos\theta)$, mentre nel secondo sopravvive il canale $t = -\frac{s}{2}(1 - \cos\theta)$. La sezione d'urto differenziale completa si ottiene mediando su questi quattro contributi:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{4} \frac{\alpha^2}{4s} \left[(|\epsilon_{LR}|^2 + |\epsilon_{RL}|^2) (1 - \cos\theta)^2 + (|\epsilon_{LL}|^2 + |\epsilon_{RR}|^2) (1 + \cos\theta)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{4} \frac{\alpha^2}{4s} \left[(|\epsilon_{LR}|^2 + |\epsilon_{RL}|^2 + |\epsilon_{LL}|^2 + |\epsilon_{RR}|^2) (1 + \cos^2\theta) + (|\epsilon_{LL}|^2 + |\epsilon_{RR}|^2 - |\epsilon_{LR}|^2 - |\epsilon_{RL}|^2) \cos\theta \right] \end{aligned}$$

Poichè si ha

$$|\epsilon_{ij}|^2 = \left| 1 + r g_i^e g_j^\mu \right|^2 = 1 + |r|^2 (g_i^e g_j^\mu)^2 + 2\text{Re}[r] g_i^e g_j^\mu$$

sfruttando il fatto che per elettrone e muone $g_i^e = g_i^\mu = g_i$ si trova

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{4} \frac{\alpha^2}{4s} \left[(4 + |r|^2 ((g_L g_L)^2 + (g_R g_R)^2 + 2(g_L g_R)^2) + 2\text{Re}[r] (g_R^2 + g_L^2 + 2g_R g_L)) (1 + \cos^2\theta) + \right. \\ &\quad \left. + 2(|r|^2 ((g_L g_L)^2 + (g_R g_R)^2 - 2(g_L g_R)^2) + 2\text{Re}[r] (g_R^2 + g_L^2 - 2g_R g_L)) \cos\theta \right] = \\ &= \frac{\alpha^2}{4s} \left[\left(1 + \frac{1}{4}|r|^2 (g_L^2 + g_R^2)^2 + \frac{1}{2}\text{Re}[r] (g_L + g_R)^2 \right) (1 + \cos^2\theta) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{1}{4}|r|^2 (g_L^2 - g_R^2)^2 + \frac{1}{2}\text{Re}[r] (g_L - g_R)^2 \right) \cos\theta \right] \equiv \\ &\equiv \frac{\alpha^2}{4s} [C_S (1 + \cos^2\theta) + C_A \cos\theta] \end{aligned}$$

dove abbiamo definito

$$C_S = 1 + \frac{1}{4}|r|^2 (g_L^2 + g_R^2)^2 + \frac{1}{2}\text{Re}[r] (g_L + g_R)^2$$

$$C_A = \frac{1}{2}|r|^2 (g_L^2 - g_R^2)^2 + \text{Re}[r] (g_L - g_R)^2$$

In generale, se consideriamo la produzione di una generica coppia $f\bar{f}$ con carica Q_f , si ha

$$\epsilon_{ij} = Q_f + r g_i^e g_j^f$$

e i coefficienti C_A e C_S diventano

$$C_S = Q_f^2 + \frac{1}{2}Q_f \text{Re}[r] (g_L + g_R)^2 + \frac{1}{4}|r|^2 (g_L^2 + g_R^2)^2$$

$$C_A = \frac{1}{2}|r|^2 (g_L^2 - g_R^2)^2 + \text{Re}[r] Q_f (g_L - g_R)^2$$

Vediamo quindi che i due coefficienti dipendono dal parametro r , che misura il peso relativo dei processi con scambio del fotone e scambio dello Z : quando r è trascurabile, sopravvive soltanto una parte del coefficiente C_S , per cui la sezione d'urto risulterà simmetrica rispetto allo scattering in avanti o indietro. Ricordiamo infatti l'espressione per r :

$$r = \frac{\sqrt{2}G_F m_Z^2}{s - m_Z^2 + i\Gamma_Z M_Z} \frac{s}{4\pi\alpha} = 1.44 \frac{s}{s - m_Z^2}$$

Per $s \ll m_Z$ si ha che $r \sim -\frac{\sqrt{2}G_F m_Z^2}{4\pi\alpha} \frac{s}{m_Z^2}$, mentre per energie tra i 20 e i 30 GeV $r \sim 0.2$. Quando r non è più trascurabile la sezione d'urto diventa asimmetrica, e presenta quindi la cosiddetta *forward-backward asymmetry*: essa è definita come la differenza tra la sezione d'urto in avanti e la sezione d'urto indietro, diviso la sezione d'urto totale

$$A_{fb} = \frac{\int_0^1 \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega - \int_{-1}^0 \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega}{\int_{-1}^1 \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega} = \frac{3 C_A}{8 C_S}$$

Vediamo infatti che nel caso in cui r sia trascurabile, $C_A \sim 0$ e l'asimmetria scompare.

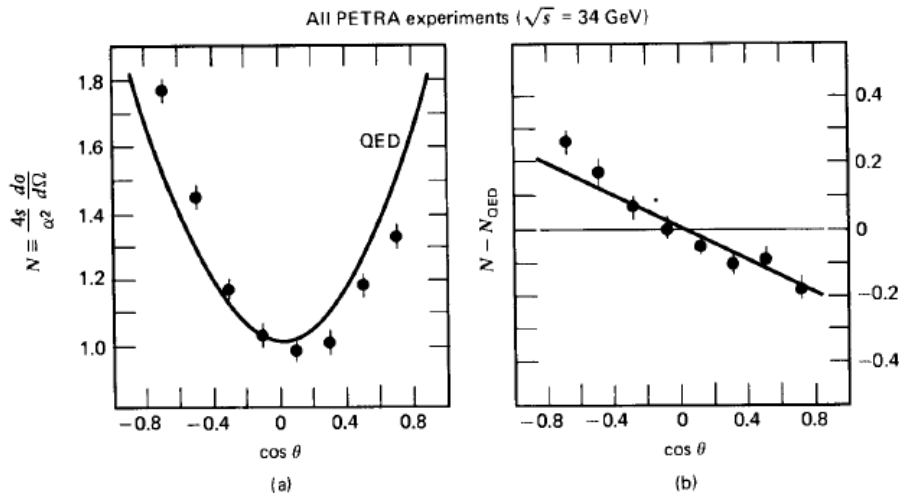


Figura 1.6: Asimmetria nella distribuzione angolare per il processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

L'asimmetria forward-backward è servita per spiegare la discrepanza che si aveva nella distribuzione angolare per il processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ considerando soltanto la predizione $1 + \cos^2 \theta$ della QED (figura 1.6); da questa asimmetria è possibile estrarre anche delle stime per i coefficienti g_i^e e g_j^f : infatti, se consideriamo il rapporto tra la sezione d'urto totale per il processo e il contributo della sezione d'urto di QED:

$$\begin{aligned} R_\mu \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}{\sigma_{QED}} &= C_S = 1 + \frac{1}{2} \text{Re}[r](g_L + g_R)^2 + \frac{1}{4} |r|^2 (g_L^2 + g_R^2)^2 = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \text{Re}[r] c_V^2 + \frac{1}{4} |r|^2 (c_V^2 + c_A^2)^2 \end{aligned}$$

ricavando i valori di R_μ per un certo r , è possibile ricavare qual'è la zona ammessa secondo l'asimmetria $f - b$:

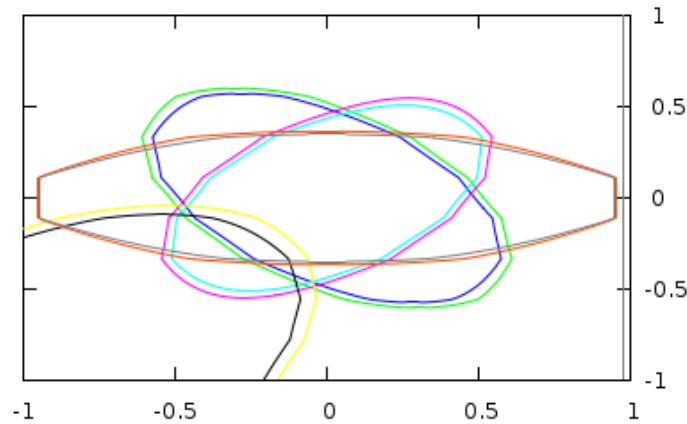


Figura 1.7: Intersezione con la zona ammessa dalla asimmetria $f - b$

Abbiamo quindi risolto ogni ambiguità, e dalle varie misure è possibile estrarre un valore per $\sin^2 \theta_W \sim 0.23$.

Dallo studio dell'asimmetria forward-backward nel decadimento del $b\bar{b}$ è stato possibile predire l'esistenza del quark top: infatti tale asimmetria dipende dal coefficiente C_A , che a sua volta dipende dal coefficiente g_L^b . Tale coefficiente contiene informazioni sull'autovalore di $SU(2)$ del bottom: dallo studio dell'asimmetria fu possibile risalire a un valore $\frac{\tau_3^b}{2} = -\frac{1}{2}$ da cui seguiva che il bottom faceva parte di un doppietto di isospin debole, e come tale doveva avere un partner con $\frac{\tau_3}{2} = \frac{1}{2}$, per l'appunto il top.

1.7 Cronologia del modello standard - Fase post-LEP

1.7.1 I bosoni intermedi

Nel 1983, al CERN, Rubbia scopre l'esistenza dei bosoni mediatori delle interazioni deboli, mediante lo scattering $q\bar{q}$ ad una energia di $250 GeV$. Le reazioni coinvolte erano

$$u + \bar{d} \rightarrow W^+ \rightarrow e^+ \nu_e, \mu^+ \nu_\mu, \tau^+ \nu_\tau$$

$$\bar{u} + d \rightarrow W^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e, \mu^- \bar{\nu}_\mu, \tau^- \bar{\nu}_\tau$$

$$d + \bar{d} \rightarrow Z \rightarrow e^+ e^-$$

Dalla statistica accumulata le masse dei bosoni intermedi vennero stimate essere

$$m_W = 81.3 \pm 1.4 GeV$$

$$m_Z = 92.1 \pm 1.7 GeV$$

Con LEP le proprietà della Z furono misurate con altissima precisione (qualche parte su 10000), mentre la massa del W , già raffinata dalle misure di LEP2, ora con TEVATRON è anch'essa conosciuta con una precisione di 5 parti su 10000. LEP partì nel 1990 al CERN, contemporaneamente ad un altro collider negli USA, SLAC, ma LEP fu in grado di produrre in minor tempo una gran quantità di Z : la sua luminosità nominale (ovvero il numero di particelle prodotte dal secondo fratto la sezione d'urto di picco) era $10^{31} \frac{1}{cm^2 s}$, e poichè la sezione d'urto di picco era circa $6 \cdot 10^{-32} cm^2$, LEP era in grado di produrre 0.6 Z al secondo, cioè circa $5 \cdot 10^4 Z$ al giorno. Per determinare la larghezza di decadimento di una particella vettoriale X in due fermioni si utilizza la seguente formula:

$$\Gamma(X \rightarrow f_1 \bar{f}_2) = \frac{1}{2M_X} (2\pi)^4 \delta^4(P_X - p_1 - p_2) \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} |\overline{\mathcal{M}}|^2$$

dove \mathcal{M} è l'ampiezza relativa al processo

$$= ig_X \gamma^\mu \frac{\tilde{c}_V - \tilde{c}_A \gamma_5}{2}$$

dove g_X è un generico accoppiamento, e c_V e c_A sono da determinarsi a seconda di quale bosone vettore consideriamo: ad esempio per lo Z $g_X = \frac{g}{\cos \theta_W}$ e $\tilde{c}_V, \tilde{c}_A \equiv c_V, c_A$, mentre per i $W^{(\pm)}$ $g_X = \sqrt{2}g$ e $\tilde{c}_V = \tilde{c}_A = \frac{1}{2}$. L'ampiezza è allora

$$\mathcal{M} = i \frac{g_X}{2} \bar{u}(p_1) \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma_5) u(p_2) \epsilon_\mu(\lambda)$$

dove $\lambda = 1, 2, 3$ è la polarizzazione del bosone. Allora

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{g_X^2}{4} \frac{1}{3} \sum_\lambda \epsilon_\mu(\lambda) (\epsilon_\nu)^*(\lambda) \{ (\tilde{c}_A^2 + \tilde{c}_V^2) Tr[\not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu] - 2\tilde{c}_A \tilde{c}_V Tr[\not{p}_1 \gamma^\mu \gamma_5 \not{p}_2 \gamma^\nu] \} \equiv \\ &\equiv \frac{1}{3} \sum_\lambda \epsilon_\mu(\lambda) (\epsilon_\nu)^*(\lambda) \{ (\tilde{c}_A^2 + \tilde{c}_V^2) T_1^{\mu\nu} - 2\tilde{c}_A \tilde{c}_V T_2^{\mu\nu} \} \end{aligned}$$

Nel sistema del centro di massa del bosone possiamo parametrizzare gli impulsi in questo modo:

$$P_X = (m_X, \vec{0})$$

$$p_1 = (E_1, \vec{p})$$

$$p_2 = (E_2, -\vec{p})$$

Se trascuriamo le masse dei fermioni risulta $E_1 = E_2 = |\vec{p}| \equiv E$, in particolare $E = \frac{m_X}{2}$. Scegliendo una base reale, e ricordando le proprietà di completezza dei vettori di polarizzazione $\epsilon^\mu(\lambda)$:

$$\sum_{\lambda=1}^3 \epsilon^\mu(\lambda)\epsilon^\nu(\lambda) = -g^{\mu\nu} + \frac{P_X^\mu P_X^\nu}{m_X^2}$$

Consideriamo le seguenti contrazioni:

$$\begin{aligned} P_X^\mu P_X^\nu \text{Tr} [\not{p}_1 \gamma_\mu \gamma_5 \not{p}_2 \gamma_\nu] &= -4i P_X^\mu P_X^\nu \epsilon_{\rho\mu\sigma\nu} p_1^\rho p_2^\sigma = 0 \\ g^{\mu\nu} \text{Tr} [\not{p}_1 \gamma_\mu \gamma_5 \not{p}_2 \gamma_\nu] &= 0 \\ P_X^\mu P_X^\nu \text{Tr} [\not{p}_1 \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu] &= 4 P_X^\mu P_X^\nu ((p_1)_\mu (p_2)_\nu + (p_1)_\nu (p_2)_\mu - g_{\mu\nu} (p_1 \cdot p_2)) = \\ &= 4 \left(\frac{m_X^2}{4} + \frac{m_X^2}{4} - m_X^2 (p_1 \cdot p_2) \right) = 4 \left(\frac{m_X^4}{2} - \frac{m_X^4}{2} \right) = 0 \\ g^{\mu\nu} \text{Tr} [\not{p}_1 \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu] &= 4 (2p_1 \cdot p_2 - 4p_1 \cdot p_2) = -4m_X^2 \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che $p_1 \cdot p_2 = E^2 + |\vec{p}|^2 = 2E^2 = \frac{m_X^2}{2}$. Dunque l'unico contributo non nullo è quello relativo alla contrazione di $g_{\mu\nu}$ con $T_1^{\mu\nu}$, e si ha

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{g_X^2}{4} \frac{1}{3} 4m_X^2 (\tilde{c}_V^2 + \tilde{c}_A^2) = \frac{g_X^2}{3} m_X^2 (\tilde{c}_V^2 + \tilde{c}_A^2)$$

Il contributo dello spazio delle fasi è

$$d\Phi = \frac{1}{2m_X} (2\pi)^4 \delta^4(P_X - p_1 - p_2) \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} =$$

Usiamo la delta spaziale per eliminare le variabili p_2 , in questo modo fissiamo $E_1 = E_2 = E$:

$$= \frac{1}{32\pi^2 m_X} \delta(m_X - 2E) \frac{d^3 p_1}{E^2} =$$

Ricordando che $p = |\vec{p}| = E$, dunque $d^3 p = p^2 dp d\Omega = E^2 dE d\Omega$, possiamo usare l'ultima delta per fissare $E = \frac{m_X}{2}$:

$$= \frac{1}{64\pi^2 m_X} d\Omega$$

Poichè l'ampiezza non dipende dall'angolo θ , possiamo integrare sull'angolo solido ottenendo $d\Phi = \frac{1}{16\pi}$. La larghezza sarà allora

$$\Gamma = d\Phi |\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{g_X^2}{48\pi} m_X (\tilde{c}_V^2 + \tilde{c}_A^2)$$

Possiamo usare questo risultato per ricavare la larghezza di decadimento per la Z in una coppia e^+e^- :

$$\Gamma(Z \rightarrow e^+e^-) = \frac{g^2}{48\pi \cos^2 \theta_W} (\tilde{c}_V^2 + \tilde{c}_A^2) = \frac{G_F m_W^2}{6\pi \sqrt{2} \cos^2 \theta_W} m_Z (\tilde{c}_V^2 + \tilde{c}_A^2) = \frac{G_F m_Z^3}{6\pi \sqrt{2}} (\tilde{c}_V^2 + \tilde{c}_A^2)$$

Usando $\sin^2 \theta_W \sim 0.21$, $\tilde{c}_V^2 = -\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W \sim 0.08$, $\tilde{c}_A^2 = -\frac{1}{2}$ e $m_Z = 91.2 \text{ GeV}$, si ottiene

$$\Gamma(Z \rightarrow e^+e^-) \sim 84.6 \text{ MeV}$$

Se vogliamo calcolare le larghezze anche per il decadimento in coppie quark antiquark, dobbiamo ricordare quali erano i valori di c_V e c_A per i quark up e down e per i neutrini:

$$c_V^\nu = \frac{1}{2} \quad c_A^\nu = \frac{1}{2}$$

$$c_V^u = \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W \sim 0.22 \quad c_A^u = \frac{1}{2}$$

$$c_V^d = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \sim 0.36 \quad c_A^d = -\frac{1}{2}$$

si ottiene

$$\Gamma(Z \rightarrow \nu\bar{\nu}) \sim 165 MeV$$

$$\Gamma(Z \rightarrow u\bar{u}) \sim 3 \cdot 98.5 MeV = 295.5 MeV$$

$$\Gamma(Z \rightarrow d\bar{d}) \sim 3 \cdot 125 MeV = 375 MeV$$

dove il fattore 3 tiene conto dei contributi di colore. La larghezza totale sarà data dalla somma di tutti i contributi, per tutte le famiglie leptoniche e di quark (escluso il quark top, che ha massa maggiore di quella dello Z):

$$\Gamma(Z \rightarrow f\bar{f}) = 3 [\Gamma(Z \rightarrow \nu\bar{\nu}) + \Gamma(Z \rightarrow l^+l^-\bar{\nu}) + \Gamma(Z \rightarrow d\bar{d})] + 2\Gamma(Z \rightarrow u\bar{u}) \sim 2500 MeV$$

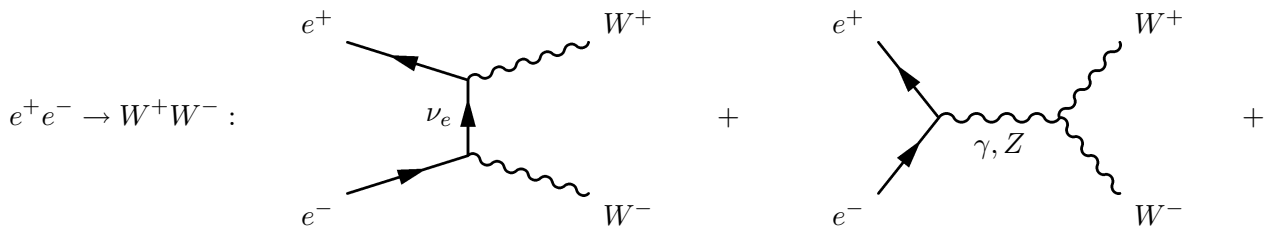
Il valore sperimentale della larghezza è $2495.2 \pm 2.3 MeV$, dunque abbiamo un buon accordo coi dati sperimentali. Ovviamente i neutrini eventualmente prodotti non possono essere osservati, ma si definisce comunque una *larghezza invisibile* come differenza tra larghezza effettivamente osservata e la larghezza in fermioni carichi:

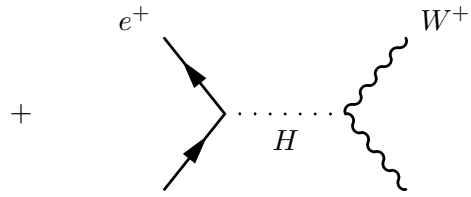
$$\Gamma_{inv} = \Gamma(Z \rightarrow f^+f^-)$$

Per i neutrini abbiamo $\Gamma_{inv}^{th} = 495 MeV$ mentre sperimentalmente risulta $\Gamma_{inv}^{exp} = 499.9 \pm 2.5 MeV$. Vediamo allora che queste misure molto precise sono anche un test della validità della nostra assunzione di considerare soltanto tre famiglie leptoniche.

1.7.2 LEP2

LEP2 è l'upgrade di LEP fino ad una energia nel centro di massa di $200 GeV$. A queste energie non siamo più al polo della Z , e sono importanti anche altri grafici, come ad esempio





Nel primo grafico si ha la possibilità di scambio di $\bar{\nu}_n$ neutrino nel canale t ; nel secondo, al solito possiamo produrre la coppia $W^{(+)}W^{(-)}$ nel canale s tramite un fotone o tramite uno Z ; nel terzo, infine, la coppia è prodotta dallo scambio dell'Higgs, ma anche in questo caso questo diagramma è fortemente soppresso in quanto proporzionale al rapporto $\frac{m_f}{m_W}$.