

Test 1 - Teoria dei Campi 2010

Discutere il path-integral della QCD in gauge assiale (nell'Euclideo)

$$n^\mu A_\mu^a = 0, \quad a = 1, \dots, 8, \quad (1)$$

dove n^μ e' un vettore assegnato. Derivare:

- regole di Feynman;
- identitaà di Ward.
- sono necessari i ghost? Commentare

Test 5 -Teoria dei Campi 2010

Considera una teoria di gauge abeliana scalare spontaneamente rotta.

- a) scrivi la Lagrangiana nel gauge unitario, e deriva le regole di Feynman
- b) deriva le regole di Feynman in R_ξ gauge introducendo il gauge-fixing per teorie spontaneamente rotte
- c) Disegna i grafici a one-loop che contribuiscono alla polarizzazione del vuoto del campo di gauge. Contribuiscono i ghost?
- d) Calcola la parte divergente di uno di questi grafici nel gauge di Feynman

Test 6 -Teoria dei Campi 2010

Discutere una teoria di gauge non-abeliana con gruppo $SU(2)$ e campo di Higgs nella rappresentazione aggiunta.

Descrivere il maggior numero possibile dei seguenti argomenti:

- la Lagrangiana, L'Hamiltoniana e le equazioni del moto;
- la rottura spontanea della simmetria $SU(2) \rightarrow U(1)$;
- i gradi di liberta' nella fase rotta in gauge unitaria;
- i corrispondenti diagrammi di Feynman.
- l'interazione a quattro Higgs ad albero e ad un loop
- impostare il calcolo del diagramma del loop dei W e stimare l'andamento a grandi energie;
- spiegare perche' questo modello non è adatto per le interazioni elettro-deboli.

Test 7 -Teoria dei Campi 2010

Studiare la rinormalizzazione della funzione d'onda della teoria $\lambda\phi^4$ mediante la regolarizzazione dimensionale.

Traccia:

– data la Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (1)$$

– ricava le regole di Feynman

– calcola la funzione a due punti $\Gamma^{(2)}$ e mostra che il primo contributo non banale alla costante di rinormalizzazione Z_ϕ del campo ϕ e' all'ordine 2-loops

– usa la parametrizzazione di Feynman:

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(ax + b(1-x))^{\alpha+\beta}} \quad (2)$$

Test 9 -Teoria dei Campi 2012

Considerare la teoria del campo scalare neutro ϕ a massa nulla in $2 < d \leq 4$ dimensioni con interazione ϕ^{2k} ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{g}{2k!} \phi^{2k}, \quad (1)$$

nei casi $k = 2, 3, 4, \dots$

Discutere il maggior numero possibile dei seguenti argomenti:

- i diagrammi di Feynman;
- i diagrammi divergenti ad un loop;
- la rinormalizzazione ad un loop;
- la forma qualitativa della funzione beta e del gruppo di rinormalizzazione in $d < 4$ per $k = 2, 3, 4, \dots$, ovvero trovare i punti fissi stabili ed instabili ed eventuali flussi RG fra di loro;
- nel caso $k = 3$ calcolare le costanti di rinormalizzazione in regolarizzazione dimensionale e quindi la funzione $\beta(g)$ per $d = 3 - \varepsilon$.

Test 11 -Teoria dei Campi 2012

a) Riesprimere i termini di interazione trilineari e quartici tra bosoni vettori del Modello Standard in termini degli autostati di massa A_μ, Z_μ, W_μ^\pm .

b) Sono possibili termini d'interazione del tipo $A^p Z^q$ con $p + q = 3, 4$?

c) Disegnare tutti i grafici di Feynman che, all'ordine più basso, contribuiscono al processo $W^+W^- \rightarrow W^+W^-$

d) Calcolare l'ampiezza del processo $W^+W^- \rightarrow W^+W^-$ nel limite di alta energia sostituendo ai W^\pm , i bosoni di Goldstone ad essi associati ϕ^\pm (usa il gauge di Feynman)

e) Calcolare la larghezza di decadimento $\Gamma(H \rightarrow W^+W^-)$ (supponendo $M_H > 2M_W$ e mostrare che nel limite $M_H \gg M_W$ si riduce a $\Gamma(H \rightarrow \phi^+\phi^-)$ con ϕ^\pm i bosoni di Goldstone associati a W^\pm (ciò significa che per $M_H \gg M_W$, il decadimento $H \rightarrow W^+W^-$ è dominato da $H \rightarrow W_L^+W_L^-$, dove W_L^\pm è la componente longitudinale di W^\pm , commentare su questo).

Test 12 -Teoria dei Campi 2012

Ricapitolare la rinormalizzazione della teoria $\lambda\phi^4$ a massa nulla,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 ,$$

in $d = 4$ ad un loop, utilizzando la regolarizzazione dimensionale: costanti di rinormalizzazione, funzione beta e dimensione anomala di ϕ .

Quindi calcolare la rinormalizzazione dell'operatore composto $:\phi^2:$ e calcolare la corrispondente dimensione anomala.

Suggerimento: considerare lo sviluppo perturbativo del correlatore

$$\Gamma^{(1,2)} = \frac{\langle : \phi^2 : \phi\phi \rangle}{\langle \phi\phi \rangle^2} = Z_c \frac{\langle : \phi_o^2 : \phi_o\phi_o \rangle}{\langle \phi_o\phi_o \rangle^2} ,$$

che definisce la costante di rinormalizzazione Z_c per $:\phi^2:$. Calcolare la corrispondente dimensione anomala al punto critico infrarosso in $d = 4 - \varepsilon$.

Se si ha tempo, verificare la compatibilità con la rinormalizzazione del correlatore

$$\langle : \phi^2 : : \phi^2 : \rangle .$$

Test 13 - Teoria dei Campi 2012

- a) Ricapitolare il calcolo della funzione β in QED all'ordine one-loop
- b) Aggiungere alla QED l'interazione minimale gauge invariante del fotone con un campo scalare carico soggetto al potenziale

$$V(\phi) = m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (1)$$

- c) Determinare la modifica alla funzione β_e in questa teoria
- d) (facoltativo) Determinare la funzione β_λ (si suggerisce di effettuare il calcolo in gauge di Lorentz con impulsi esterni nulli)

Test 14 - Teoria dei Campi 2013

Considera la QCD scalare, una teoria di campi scalari complessi che interagiscono con bosoni di gauge con invarianza locale $SU(3)$. Interazioni di questo tipo sono presenti in estensioni supersimmetriche del Modello Standard.

a) Scrivi la Lagrangiana assegnando i campi scalari alla rappresentazione R di $SU(3)$ con generatori T_R^a .

b) Deriva le regole di Feynman nel gauge $\partial^\mu A_\mu^a=0$ aggiungendo il termine di gauge-fixing per la R_ξ gauge.

c) Disegna i grafici a one-loop che contribuiscono alla polarizzazione del vuoto dei campi di gauge. Contribuiscono i ghost?

d) Calcola la parte divergente della funzione a 2-punti dei campi di gauge nel gauge di Feynman all'ordine one-loop.

Test 18 -Teoria dei Campi 2014

- Scrivere la Lagrangiana rinormalizzabile piú generale per 2 campi scalari reali con simmetria di paritá e di scambio $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$.
- Ricava le regole di Feynman
- Rinormalizza la teoria all'ordine one-loop usando lo schema di sottrazione minimale
- Calcola le funzioni β per i due accoppiamenti dei termini quartici nei campi
- Discuti le simmetrie della teoria al variare di questi due accoppiamenti e ricava il comportamento asintotico nel limite di massima simmetria
- Commenta il risultato

Test 20 -Teoria dei Campi 2014

Scrivere la Lagrangiana piú generale rinormalizzabile \mathcal{L} per un campo scalare reale ϕ ed un campo spinoriale ψ con interazione di tipo pseudoscalare

– scrivi la Lagrangiana *bare* come somma di \mathcal{L} e dei controtermini e deriva le regole di Feynman per la teoria rinormalizzata

– Calcola la self-energia di ψ a ordine *one – loop* e deriva i relativi controtermini nello schema di rinormalizzazione minimale

– Calcola la self-energia di ϕ a ordine *one – loop* e deriva i relativi controtermini nello schema di rinormalizzazione minimale

– Calcola la correzione al vertice $\phi\bar{\psi}\gamma_5\psi$ a ordine *one – loop* e deriva il relativo controtermine nello schema di rinormalizzazione minimale

– Calcola la correzione al vertice ϕ^4 a ordine *one – loop* e deriva il relativo controtermine nello schema di rinormalizzazione minimale

Test 22 -Teoria dei Campi

Si studi la teoria di campo con flusso del gruppo di rinormalizzazione determinato dalla seguente beta-function

$$\mu \frac{dg}{d\mu} = \beta(g), \quad \beta(g) = -g (\varepsilon^2 - g^2) + O(g^4)$$

con μ l'energia del punto di rinormalizzazione ed $\varepsilon \ll 1$ una costante positiva.

- Si risolva l'equazione di flusso e si discutano le fasi della teoria.
- Si discuta la validità di questi risultati nell'approssimazione perturbativa $g \ll 1$.
- Si risolva l'equazione di Callan-Symanzik per il correlatore $\langle \phi(x)\phi(0) \rangle$ del campo ϕ con dimensione canonica uno e dimensione anomala data da

$$\gamma(g) = -\varepsilon - g + O(g^2).$$

- Si discuta il comportamento della funzione di correlazione nelle varie fasi della teoria.

- Si discuta il limite $\varepsilon \rightarrow 0$.

Test 25 -Teoria dei Campi 2016

- Scrivere la Lagrangiana \mathcal{L}_s per il campo scalare del Modello Standard
- Mostrare che, spengendo le interazioni di gauge, \mathcal{L}_s è invariante sotto $O(4)$ ed è anche equivalente alla Lagrangiana del modello- σ $SU(2) \times SU(2)$
- Dopo la rottura spontanea della simmetria, scrivere \mathcal{L}_s in termini di $\vec{\pi}$ (bosoni di Goldstone) e H (campo di Higgs) e calcolare le ampiezze di scattering: $\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^-$, $\pi^+\pi^- \rightarrow zz$, $zz \rightarrow zz$ con $\pi^+ = (\pi^1 - i\pi^2)/\sqrt{2}$, $\pi^- = (\pi^1 + i\pi^2)/\sqrt{2}$, $z = \pi^3$ (sempre in assenza di interazioni di gauge)
- Calcolare l'ampiezza $W_L W_L \rightarrow W_L W_L$ (dove W_L è la componente longitudinale del bosone W del Modello Standard) nel limite di alta energia: $s \gg M_W^2$, e confrontarla con l'ampiezza $\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ calcolata precedentemente. Commenta il risultato.
- Facoltativo: Utilizza il risultato per l'ampiezza $W_L W_L \rightarrow W_L W_L$ per derivare il limite di unitarietà di Lee-Quigg-Thacker $m_H^2 < 4\pi\sqrt{2}/G_F$ (consulta l'articolo di Lee-Quigg-Thacker Phys. Rev. D16 (1977) 1519 (<http://inspirehep.net/record/119348/files/fermilab-pub-77-030-T.pdf>))

Test 26 -Teoria dei Campi 2015/16

Considerare la teoria $\lambda\phi^3$ in $d = 6$ dimensioni,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{3!} \phi^3 . \quad (1)$$

Determinare:

- i diagrammi di Feynman;
- i diagrammi divergenti ad un loop;
- la rinormalizzazione ad un loop nel caso $m = 0$;

Sempre nel limite $m = 0$ ed ad un loop, determinare il maggior numero possibile delle seguenti quantità:

- le costanti di rinormalizzazione utilizzando la regolarizzazione dimensionale;
- la funzione $\beta(\lambda)$ della teoria in $d = 6 - \varepsilon$ ed il flusso del gruppo di rinormalizzazione;
- l'equazione di Callan-Symanzik per la funzione a due punti del campo ϕ e la sua soluzione (in $d = 6 - \varepsilon$)

Test 29 - Teoria dei Campi II - 2016

Considera l'ampiezza di scattering a 4 fermioni massless in QCD.

a) Disegna tutti i grafici a 1-loop che contribuiscono al processo.

b) Verifica che il contributo all'ampiezza ad ordine 1-loop derivante dalla self-energia del gluone è gauge dipendente e commenta il risultato.

c) Ti aspetti che il risultato completo per l'ampiezza di scattering, nel caso di fermioni on-shell, dipenda dalla scelta di gauge? Verificalo.

Suggerimento: considera la R_ξ gauge e verifica la cancellazione dei termini ξ -dipendenti a livello degli integrandi di loop. Utilizza (dopo averle verificate) le seguenti relazioni:

$$\bar{u}(\hat{p})\gamma^\mu S(\hat{p} + k)\gamma^\alpha u(p)k^\mu = \bar{u}(\hat{p})\gamma^\alpha S(p + k)\gamma^\nu u(p)k^\nu = \bar{u}(\hat{p})\gamma^\alpha u(p) \quad (1)$$

dove p e \hat{p} sono i quadri-impulsi di 2 dei fermioni esterni on-shell, uno entrante e l'altro uscente.

Test 30 -Teoria dei Campi 2016

Considerare il modello σ non-lineare in $d = 4$ dimensioni,

$$\mathcal{L}_{\text{nl}\sigma} = \frac{1}{2g} (\partial_\mu n^a)^2, \quad (1)$$

dove il vettore n^a ha quattro componenti, $a = 1, \dots, 4$, e descrive una sfera tridimensionale, $\sum_{a=1}^4 (n^a)^2 = v^2$.

Discutere il maggior numero possibile dei seguenti argomenti:

- le simmetrie del modello;
- la relazione con la teoria scalare $\lambda\phi^4$ di un campo doppietto complesso $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ nella fase spontaneamente rotta,

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2} |\partial_\mu \phi|^2 - \frac{\lambda}{4!} (|\phi|^2 - v^2)^2, \quad (2)$$

- lo sviluppo perturbativo di $\mathcal{L}_{\text{nl}\sigma}$ intorno alla configurazione $\langle n^a \rangle = v\delta_1^a$ e i diagrammi di Feynman;
- le divergenze ad un loop;
- la rinormalizzabilità della serie perturbativa in $d = 4$.
- la forma qualitativa del diagramma delle fasi della teoria in $2 < d < 4$, ovvero l'andamento dei flussi RG della costante d'accoppiamento g .