

Appunti per il corso di dottorato:

Parte II - Fenomeni critici

(A.A. 1994/95)

Roberto Casalbuoni*

*Dipartimento di Fisica dell'Universita' di Firenze, 50019, Firenze
Sezione INFN, 50019 Firenze*

Contents

I. Introduzione alle transizioni di fase.	2
II. La teoria di Landau.	11
III. Transizioni del 1 ^o ordine.	16
IV. Sistemi inomogenei.	20
V. Interpretazione dell'energia libera di Landau.	22
VI. Le funzioni di correlazione.	26
VII. Fluttuazioni e il criterio di Landau-Ginzburg.	30
VIII. Il modello gaussiano.	33
IX. Dimensioni anomale.	38
X. Esponenti critici e leggi di scala.	44
XI. Gruppo di rinormalizzazione alla Wilson I (Approccio di Kadanoff).	50
XII. Il gruppo di rinormalizzazione nei fenomeni critici.	54
XIII. Punti fissi.	60

*Electronic address: casalbuoni@fi.infn.it

XIV. Origine dello scaling.	64
XV. Gruppo di rinormalizzazione per il modello di Ising in 2-d su un reticolo triangolare.	69
XVI. Il modello gaussiano.	75
XVII. Il punto fisso gaussiano.	78
XVIII. Equazioni del gruppo di rinormalizzazione in forma differenziale.	83
XIX. Calcolo perturbativo degli esponenti critici. ϵ -expansion.	84
A. Relazione tra tracce nel discreto e nel continuo	93

I. INTRODUZIONE ALLE TRANSIZIONI DI FASE.

Uno dei contributi più importanti alla teoria delle transizioni di fase è dovuto a Pierre Curie che nella sua tesi del 1895 iniziava lo studio delle transizioni magnetiche ponendosi alcune domande, quali: dal punto di vista magnetico esistono vari tipi di sostanze, come le diamagnetiche, le paramagnetiche e le ferromagnetiche, le loro proprietà magnetiche sono scorrelate o si tratta di un unico fenomeno che si manifesta sotto differenti aspetti?. Le misure di Curie dimostrarono che mentre la suscettività delle sostanze diamagnetiche era indipendente dalla temperatura T , per le sostanze paramagnetiche diminuiva al crescere di T . Infine, una sostanza ferromagnetica riscaldata, si trasforma in una sostanza debolmente magnetica al di sopra di una certa temperatura (temperatura di Curie).

Nel 1905, Langevin proponeva una teoria delle sostanze diamagnetiche e paramagnetiche che spiegava i dati di Curie attribuendo il diamagnetismo ed il paramagnetismo all'esistenza o meno, di un momento magnetico permanente. Se si trascurano le interazioni magnetiche tra le varie molecole, cosa ragionevole per sostanze paramagnetiche, si dimostra che la magnetizzazione M di un materiale paramagnetico in un campo H ed alla temperatura T , è data dalla relazione

$$M = N\mu L\left(\frac{\mu H}{kT}\right) \quad (1.1)$$

dove N è il numero di molecole, μ il loro momento magnetico e L la funzione di Langevin

$$L(x) = \coth x - \frac{1}{x} \quad (1.2)$$

Infatti, l'energia di un singolo momento di dipolo $\vec{\mu}$ è data da

$$E = -\vec{\mu} \cdot \vec{H} = -\mu H \cos \theta \quad (1.3)$$

mentre la magnetizzazione media sarà data da

$$M = N\mu \langle \cos \theta \rangle \quad (1.4)$$

Si ottiene dunque

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{\int e^{\mu H \cos \theta / kT} \cos \theta d^3 \vec{r} \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3}}{\int e^{\mu H \cos \theta / kT} d^3 \vec{r} \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3}} = \frac{\int_{-1}^{+1} e^{\mu H w / kT} w dw}{\int_{-1}^{+1} e^{\mu H w / kT} dw} \quad (1.5)$$

da cui, posto $x = \mu H / kT$,

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{\int_{-1}^{+1} e^{xw} w dw}{\int_{-1}^{+1} e^{xw} dw} = \frac{d}{dx} \left[\log \left(\int_{-1}^{+1} e^{xw} dw \right) \right]$$

si ottiene infine

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{d}{dx} \left[\log \left(\frac{e^x - e^{-x}}{x} \right) \right] = L(x) \quad (1.6)$$

da cui la (1.1). È interessante studiare il comportamento della funzione di Langevin per $\mu H \ll kT$, cioè per $x \ll 1$

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \approx \frac{1}{x} + \frac{1}{3}x - \frac{x^3}{45} \quad (1.7)$$

e

$$L(x) \approx \frac{1}{3}x - \frac{x^3}{45} \quad (1.8)$$

cioè

$$M \approx \frac{N\mu^2}{3kT} H \quad (1.9)$$

Vediamo così che M decresce con l'aumentare di T , in accordo con i fatti sperimentali.

L'esistenza della temperatura di Curie fu spiegata nel 1906 da Weiss che introdusse il concetto fondamentale di campo medio. L'idea di Weiss era che ogni singolo magnete fosse soggetto sia al campo esterno che al campo H_M dovuto a tutti gli altri magneti. Weiss suppose inoltre che H_M fosse proporzionale alla magnetizzazione stessa

$$H_M = KM \quad (1.10)$$

L'equazione 1.1) che determina la magnetizzazione diviene ora una relazione di autoconsistenza

$$M = N\mu L\left(\frac{\mu(H + KM)}{kT}\right) \quad (1.11)$$

Se per $H = 0$ poniamo

$$x = \frac{M}{N\mu}, \quad y = \frac{KN\mu^2}{kT} \quad (1.12)$$

si ottiene la condizione

$$x = L(xy) \quad (1.13)$$

Per piccoli valori di x , si ottiene dall'espansione 1.8)

$$x = \frac{xy}{3} - \frac{x^3 y^3}{45} \quad (1.14)$$

Vediamo che per $y \leq 3$ questa equazione ha soluzione solo a $x = 0$, mentre per $y > 3$, dato che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} L(x) = 1 \quad (1.15)$$

si deve avere una soluzione per $x \neq 0$. Il grafico di $L(xy)$ in funzione di x , per vari valori di y , è illustrato in Fig. 1.1). Pertanto, il punto critico al di sopra del quale si ha una

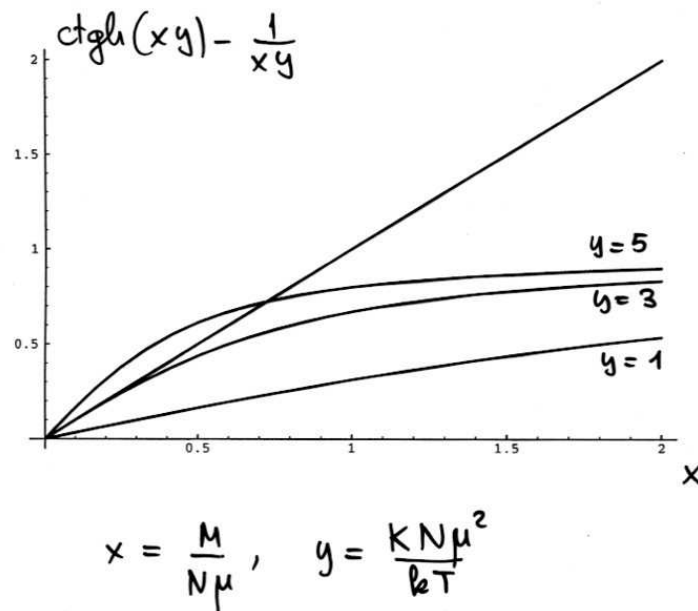


Fig. 1.1)

magnetizzazione spontanea è $y = 3$, cioè

$$T_c = \frac{KN\mu^2}{3k} \quad (1.16)$$

Usando ancora l'espansione della funzione di Langevin possiamo calcolare la suscettività. Infatti, vicino alla temperatura critica (per cui $x \approx 0$) e per piccoli valori del campo magnetico

$$L\left(\frac{\mu(H + KM)}{kT}\right) \approx \frac{\mu}{3kT}(H + KM) \quad (1.17)$$

L'equazione diviene allora

$$M = \frac{N\mu^2}{3kT}(H + KM) = \frac{T_c}{KT}(H + KM) \quad (1.18)$$

e risolvendo per M

$$M = \frac{T_c}{K} \frac{H}{T - T_c} \quad (1.19)$$

da cui ricaviamo la suscettività magnetica

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} = \frac{T_c}{K} \frac{1}{T - T_c} \quad (1.20)$$

Questa relazione ci mostra come la suscettività magnetica abbia una divergenza del tipo $1/(T - T_c)$ in vicinanza del punto critico.

La teoria di Weiss rappresenta una tappa molto importante per lo studio dei fenomeni critici, dato che introduce il concetto di campo medio che si rivelerà estremamente fruttuoso.

Langevin considerava già il para ed il ferromagnetismo come due fasi distinte, ma questa idea non rientrava del tutto nelle idee della sua epoca, dato che non si aveva una discontinuità apparente nelle due fasi. Una analoga difficoltà si presentava anche nello studio delle leghe metalliche. Consideriamo per esempio CuZn. A basse temperature il rame e lo zinco occupano i siti di due diversi reticoli cubici (vedi Fig. 1.2)), mentre ad alte temperature sono distribuiti casualmente sui nodi di un reticolo cubico centrato. Per introdurre un grado di ordine, introduciamo il numero di atomi, r , che si trovano nella posizione corretta rispetto alla configurazione ordinata, e di numero di atomi, w , che si trovano nel posto sbagliato. Il grado di ordine è allora definito come

$$s = \frac{r - w}{r + w} \quad (1.21)$$

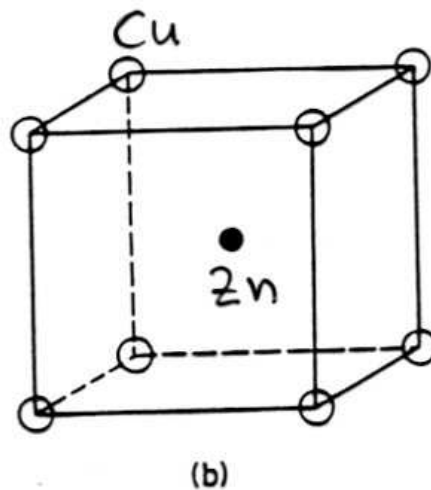


Fig. 1.2)

β -BRASS

Allora $s = 1$ quando tutti gli atomi si trovano nella configurazione giusta, $w = 0$. Mentre nella configurazione disordinata, in cui $r = w$ in media, si ha $s = 0$. Se consideriamo la sola entropia dovuta alla configurazione atomica avremo ($N = r + w$)

$$S = k \log W = k \log \left(\frac{N!}{r!w!} \right) \quad (1.22)$$

ed usando la formula di Stirling

$$S = k(N \log N - r \log r - w \log w) \quad (1.23)$$

Introducendo ora la frazione di atomi in posizione corretta $f = r/N$, avremo $w = (1 - f)N$ e l'entropia si può riscrivere nella forma

$$S = -kN[f \log f + (1 - f) \log(1 - f)] \quad (1.24)$$

Notiamo anche che il grado di ordine si può riscrivere in termini di f come

$$s = 2f - 1 \quad (1.25)$$

Se supponiamo di scambiare un atomo di rame con uno di zinco, avremo una variazione di f pari a $\delta f = -1/N$, quindi

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial f} \delta f = k \log \frac{f}{1-f} \quad (1.26)$$

In questo scambio l'energia libera $F = U - TS$ rimarrà invariata e quindi la variazione di entropia dovrà essere compensata da una variazione di U . Avremo allora

$$\delta U = kT \log \frac{f}{1-f} \quad (1.27)$$

o in termini del grado di ordine

$$\delta U = kT \log \frac{1+s}{1-s} \quad (1.28)$$

Risolvendo in s

$$s = \frac{e^{\delta U/kt} - 1}{e^{\delta U/kt} + 1} = \tanh \frac{\delta U}{2kT} \quad (1.29)$$

Bragg e Williams nel 1934 fecero l'ipotesi che la variazione di energia interna necessaria a compensare la variazione di entropia fosse essa stessa proporzionale al grado di ordine s e posero

$$\delta U = \frac{V_0}{2} s \quad (1.30)$$

da cui si ottiene la condizione di autoconsistenza

$$s = \tanh \frac{V_0 s}{4kT} \quad (1.31)$$

L'ipotesi di Bragg e Williams non è altro che l'analogia ipotesi fatta per il campo medio da Weiss. Le soluzioni della equazione precedente possono essere studiate ancora tramite una espansione in serie per piccoli s . Conviene anche in questo caso definire

$$x = s, \quad y = \frac{V_0}{4kT} \quad (1.32)$$

e l'equazione diviene

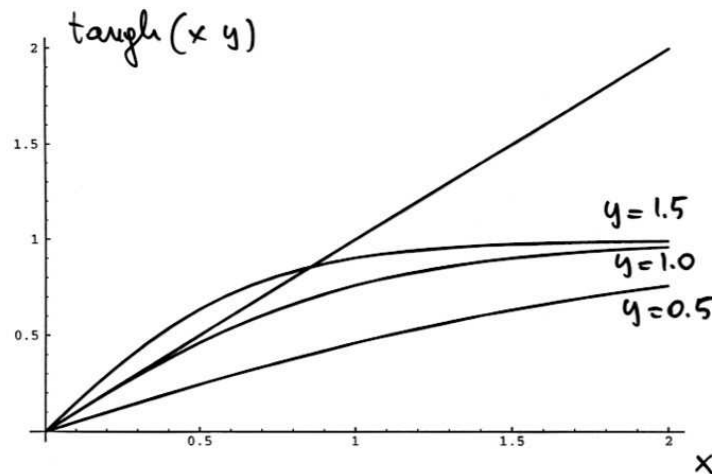
$$x = \tanh xy \quad (1.33)$$

Si ha per $x \ll 1$

$$\tanh xy \approx xy - \frac{x^3 y^3}{3} \quad (1.34)$$

e quindi l'equazione di autoconsistenza ha soluzioni nulle per $y \leq 1$ e soluzioni diverse da zero per $y > 1$ (ancora notare che la $\tanh x$ tende a 1 per $x \rightarrow \infty$). Quindi la temperatura critica è data da

$$T_c = \frac{V_0}{4k} \quad (1.35)$$



$$x = s, \quad y = \frac{V_0}{4kT}$$

Fig. 1.3)

Questa situazione è rappresentata in Fig. 1.3). Al di sotto di questa temperatura il sistema è completamente ordinato e quindi $s = 1$. Bragg e Williams notarono che anche in questo caso il passaggio dall'ordine totale al disordine è continuo e chiamarono questo tipo di transizione continua. Fecero anche l'ulteriore osservazione che la transizione si completava giusto alla temperatura critica.

Nel 1911, Kammerling-Omnes osservò che la densità dell'elio liquido aveva un massimo a $2.2^{\circ}K$. Fu poi mostrato che il calore specifico aveva una discontinuità alla stessa temperatura. L'interpretazione fu che l'elio coesistesse in due fasi distinte, elio I e elio II. Però il valore del calore latente misurato risultava consistente con zero. Dunque anche questa transizione doveva considerarsi di tipo continuo come le altre.

Nel 1933, Ehrenfest dette una classificazione delle transizioni di fase facendo riferimento all'energia libera di Gibbs

$$G = U - TS + PV \quad (1.36)$$

e chiamando

1) Transizioni del 1^o ordine, quelle con una discontinuità in grandezze, come l'entropia, collegate alle derivate prime di G ($S = -(\partial G/\partial T)_P$)

2) Transizioni del 2⁰ ordine, quelle con discontinuità in grandezze, come il calore specifico, collegate alle derivate seconde di G ($c_P = T(\partial S/\partial T)_P$).

Le idee più utile in questo settore vennero però introdotte nel 1937 da Landau. Egli osservò che le transizioni senza calore latente si accompagnavano ad un cambiamento della simmetria del problema. A questo cambiamento Landau associò il concetto di parametro d'ordine. Il parametro d'ordine è in generale una quantità estensiva, definita in modo da risultare nulla nella fase più simmetrica e non nulla nella fase meno simmetrica. Negli esempi precedenti i parametri d'ordine erano la magnetizzazione M e la variazione di energia interna δU . Nel caso della magnetizzazione la fase più simmetrica è quella disordinata in cui si ha invarianza per rotazioni in 3 dimensioni, mentre nella fase ordinata, meno simmetrica, sopravvive solo l'invarianza per rotazioni lungo la direzione della magnetizzazione. Nel caso delle lega CuZn, nella fase ordinata, meno simmetrica, si hanno due sottoreticoli distinti, quello occupato dal rame e quello occupato dallo zinco. Nella fase disordinata i due sottoreticoli diventano equivalenti e si acquista una simmetria di permutazione tra i due. La classificazione di Landau delle transizioni di fase procede allora come segue:

- 1) Transizioni senza parametro d'ordine. Le simmetrie nelle varie fasi non sono incluse le une nelle altre. Queste transizioni risultano sempre del 1⁰ ordine nel senso di Ehrenfest.
- 2) Transizioni con parametro d'ordine. Il gruppo di simmetria della fase meno simmetrica è incluso nel gruppo della fase più simmetrica. Se il parametro d'ordine è discontinuo alla transizione, la transizione è del 1⁰ ordine, se continuo la transizione è del 2⁰ ordine.

Il grande progresso di Landau fu nel supporre che l'energia libera di Gibbs (che in realtà per Landau è piuttosto un funzionale fenomenologico, più che la G) fosse una funzione analitica del parametro d'ordine in vicinanza della transizione. Questa ipotesi permetteva il calcolo di certe quantità in vicinanza del punto critico. Per esempio era possibile calcolare come il parametro d'ordine η si annullasse in vicinanza del punto critico

$$\eta \approx (T_c - T)^{\frac{1}{2}} \quad (1.37)$$

oppure come divergesse la suscettibilità magnetica

$$\chi \approx \frac{1}{T - T_c} \quad (1.38)$$

Più generalmente si definisce una serie di esponenti critici quali

$$\begin{aligned} \text{calore specifico} \quad C &\approx (T_c - T)^{-\alpha'}, \quad T < T_c \\ &C \approx (T - T_c)^{-\alpha}, \quad T > T_c \end{aligned}$$

$$\text{parametro d'ordine} \quad \eta \approx (T_c - T)^\beta, \quad T < T_c$$

$$\begin{aligned} \text{suscettività} \quad \chi &\approx (T_c - T)^{-\gamma'}, \quad T < T_c \\ &\chi \approx (T - T_c)^{-\gamma}, \quad T > T_c \end{aligned}$$

Nella teoria di Landau, come vedremo si trova, indipendentemente dal numero di dimensioni dello spazio

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha' = 0 \\ \beta &= \frac{1}{2} \\ \gamma &= \gamma' = 1 \end{aligned} \tag{1.39}$$

Mentre in un modello risolubile, quale il modello di Ising in due dimensioni, si ha

$$\alpha = \alpha' = 0, \quad \beta = \frac{1}{8}, \quad \gamma = \gamma' = \frac{7}{4} \tag{1.40}$$

e nel caso tridimensionale sono stati stimati i seguenti valori

$$\alpha' \approx \frac{1}{8}, \quad \beta \approx \frac{5}{16}, \quad \gamma' \approx \frac{5}{4} \tag{1.41}$$

Questo significa che l'approccio di Landau non è corretto, ed infatti vedremo che l'origine dei problemi sta nel fatto che la teoria di Landau ignora le fluttuazioni del parametro d'ordine. Questa approssimazione è corretta in un numero di dimensioni maggiore di quattro, ma non per $d \leq 4$. Più in generale, molte relazioni tra gli esponenti critici seguono dall'ipotesi che l'energia libera, vicino alla transizione, abbia una forma del tipo

$$F(T, \eta) \approx (T - T_c)^{2-\alpha} f\left(\frac{\eta}{(T - T_c)^\beta}\right) \tag{1.42}$$

Questa ipotesi non ha una dimostrazione rigorosa ma ha molte conferme sia teoriche che sperimentali. I lavori di Kadanoff e Wilson conducono ad un tale risultato.

Referenze

N. Boccara, *Simétries Brisées*, Hermann.

II. LA TEORIA DI LANDAU.

Come abbiamo mostrato negli esempi precedenti, nella teoria di campo medio per le transizioni del secondo ordine si arriva ad equazioni di autoconsistenza del tipo

$$x = ax + bx^3 \quad (2.1)$$

con i parametri a e b funzioni della temperatura e delle altre caratteristiche del sistema. La temperatura critica è fissata dalla condizione di avere soluzioni diverse da zero che equivale a richiedere $a(T_c) = 1$. Soluzioni non nulle sono determinate da

$$x^2 = \frac{1 - a}{b} \quad (2.2)$$

Negli esempi esaminati l'assenza di termini in x^2 era legata a particolari simmetrie del problema. Infatti in entrambi i casi si deve avere fisicamente la stessa soluzione sia per $M \rightarrow -M$ per il ferromagnete che per $s \rightarrow -s$ ($r \rightarrow w$) nel caso della lega. Questi fatti portarono Landau all'idea che simili considerazioni fossero applicabili a tutte le transizioni di fase del secondo ordine. La teoria risultante è una teoria fenomenologica basata su considerazioni generali di simmetria e di analiticità. Questa trattazione può anche essere motivata basandosi su di un calcolo microscopico, ma questo tipo di approccio non è molto rigoroso e non risulta nemmeno di particolare utilità.

La teoria di Landau postula che esista una funzione L (energia libera di Landau) che dipende da una serie di parametri tipici del problema, quali temperatura, pressione, ecc. L'insieme di questi parametri è l'insieme delle costanti di accoppiamento del problema che vengono indicate collettivamente da $\{K_i\}$. Inoltre L dipende dal parametro, o dai parametri, d'ordine. Come vedremo in seguito L non coincide con l'energia libera di Gibbs, sebbene ne sia strettamente correlata. È infatti una ipotesi fondamentale della teoria di Landau che tutte le funzioni termodinamiche possano essere calcolate da L come essa coincidesse con G . Le proprietà che si assumono per la funzione di Landau sono le seguenti:

- 1) L deve essere invariante rispetto alle simmetrie del problema.
- 2) In vicinanza di T_c , dove η (parametro d'ordine) si annulla, L può essere sviluppata in una serie di potenze in η e negli accoppiamenti. Cioè L è analitica in η e nei $\{K_i\}$. Nel caso di un sistema spazialmente uniforme potremo allora scrivere

$$\mathcal{L} = \frac{L}{V} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(K_i) \eta^n \quad (2.3)$$

3) In un sistema inomogeneo con parametro d'ordine $\eta(\vec{r})$, funzione della posizione, \mathcal{L} è una funzione locale del parametro d'ordine. Dipende cioè solo da $\eta(\vec{r})$ e da un numero finito di derivate.

4) Per $T < T_c$, la condizione di minimo è risolta con $\eta \neq 0$, mentre per $T > T_c$ la soluzione è $\eta = 0$. Ne segue che per T sufficientemente vicino a T_c potremo prendere un numero finito di termini nell'espansione (2.3). In particolare terremo i termini sino al quarto ordine

$$\mathcal{L} = \sum_{n=0}^4 a_n(K_i)\eta^n \quad (2.4)$$

La scelta del parametro d'ordine è evidentemente correlata con le proprietà di simmetria del sistema. Negli esempi visti precedentemente avevamo una simmetria $M \rightarrow -M$ e $s \rightarrow -s$ rispettivamente. Il gruppo di simmetria di queste teorie è il gruppo discreto \mathbb{Z}_2 . Nella fase simmetrica il parametro d'ordine è nullo ed il sistema possiede tutta l'invarianza originale G . Nella fase rotta, in cui $\eta \neq 0$ il sistema non può essere più invariante sotto il gruppo originale, ma sopravviverà solo la simmetria corrispondente al sottogruppo $H \subset G$ che lascia invariante il minimo in η . Questa situazione è del tutto generale. Tipicamente il parametro d'ordine si trasforma sotto una rappresentazione irriducibile \underline{r} di G , $\eta_i^{(r)}$, $i = 1, \dots, \dim(\underline{r})$. Nella fase simmetrica si ha $\eta_i^{(r)} = 0$, mentre nella fase rotta avremo $\eta_\alpha^{(r)} \neq 0$, per tutti gli α tali che sotto una trasformazione di H $\eta_\alpha^{(r)} \rightarrow \eta_\alpha^{(r)}$. Questo significa che la decomposizione di \underline{r} in rappresentazioni di H deve contenere almeno una volta la rappresentazione scalare di H . Per esempio, se $G = O(4)$ e $\eta_i^{(r)} = \vec{v}$, e $H = O(3)$ corrispondente a rotazioni attorno all'asse 4, la soluzione non nulla può essere solo del tipo $\vec{v} = (0, 0, 0, v)$, che è evidentemente invariante sotto $O(3)$.

Se ci restringiamo a considerare il caso di un singolo parametro d'ordine con simmetria \mathbb{Z}_2 , dovremo eliminare i termini dispari nella \mathcal{L} ed avremo quindi

$$\mathcal{L} = a_0(K_i) + a_2(K_i)\eta^2 + a_4(K_i)\eta^4 \quad (2.5)$$

Il parametro $a_0(K_i)$ rappresenta il valore della funzione di Landau nella fase simmetrica e può essere momentaneamente ignorato. Per quanto concerne a_2 ed a_4 supporremo di poterli sviluppare intorno alla temperatura critica:

$$a_2 = a_2^0 + \frac{T - T_c}{T_c} a_2^1$$

$$a_4 = a_4^0 + (T - T_c)a_4^1 \quad (2.6)$$

Dalla minimizzazione di \mathcal{L} si ha

$$2\eta a_2 + 4\eta^3 a_4 = 0 \quad (2.7)$$

e

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \eta^2} = 2a_2 + 12a_4\eta^2 \quad (2.8)$$

Per $T > T_c$ si deve avere un minimo a $\eta = 0$ e quindi

$$a_2 > 0, \quad T > T_c \quad (2.9)$$

Analogamente, per $T < T_c$, si deve avere una soluzione non nulla

$$\eta^2 = -\frac{a_2}{2a_4}, \quad T < T_c \quad (2.10)$$

In questo caso si ha

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \eta^2} = 2a_2 + 12a_4 \left(-\frac{a_2}{2a_4} \right) = -4a_2 \quad (2.11)$$

La condizione di minimo ci da dunque

$$a_2 < 0, \quad T < T_c \quad (2.12)$$

Per avere una soluzione reale segue

$$a_4 > 0 \quad (2.13)$$

Poiché a_2 cambia di segno alla transizione, si dovrà avere

$$a_2^0 = 0 \quad (2.14)$$

da cui

$$a_2 = a_2^1 \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right) \quad (2.15)$$

con $a_2^1 > 0$. Non abbiamo informazioni sul segno di a_4 per $T < T_c$, ma se esso fosse negativo, allora a_4 dovrebbe annullarsi alla transizione e quindi entrambi a_2 ed a_4 sarebbero nulli. Lo sviluppo al 4^o ordine non sarebbe allora sufficiente e dovremmo spingerlo almeno sino al 6^o ordine (in questo caso si ha un punto tricritico nel diagramma di fase). Limitarsi al 4^o ordine è equivalente quindi a supporre $a_4 \neq 0$ a $T = T_c$ e quindi, per continuità avremo $a_4 > 0$ anche un poco al disotto della transizione. L'energia libera di Landau può essere riscritta allora nella forma

$$\mathcal{L} = at\eta^2 + \frac{1}{2}b\eta^4 + a_0 \quad (2.16)$$

con

$$t = \frac{T - T_c}{T_c} \quad (2.17)$$

e $a > 0$ e $b > 0$ due parametri fenomenologici. Possiamo anche introdurre un campo esterno come si è fatto nel caso dei materiali ferromagnetici scrivendo

$$\mathcal{L} = at\eta^2 + \frac{1}{2}b\eta^4 + a_0 - H\eta \quad (2.18)$$

Siamo adesso in grado di valutare gli esponenti critici. Ricordiamo che per l'energia libera di Gibbs $G = F + PV$ vale la relazione

$$dG = -SdT + VdP \quad (2.19)$$

da cui

$$S = -\left.\frac{\partial G}{\partial T}\right|_P, \quad V = \left.\frac{\partial G}{\partial P}\right|_T \quad (2.20)$$

Possiamo allora calcolare l'entropia specifica dalla funzione di Landau

$$S = -\frac{\partial \mathcal{L}(\eta, T)}{\partial T} = -\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta}\right|_T \frac{\partial \eta}{\partial T} - \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T}\right|_\eta = -\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T}\right|_\eta \quad (2.21)$$

dato che sul minimo

$$\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta}\right|_T = 0 \quad (2.22)$$

Si ha allora, trascurando i termini η^4 che risultano del secondo ordine in t^2 ,

$$S = -\frac{\partial a_0}{\partial T} - \frac{a}{T_c}\eta^2 = S_0 - \frac{a}{T_c}\eta^2 \quad (2.23)$$

con S_0 l'entropia nella fase simmetrica. Nella fase rotta avremo η^2 fissato da

$$0 = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta}\right|_T = 2at\eta + 2b\eta^3 - H \quad (2.24)$$

Per $H = 0$ si ha

$$\eta^2 = -\frac{a}{b}t \quad (2.25)$$

e quindi

$$S = S_0 + \frac{a^2}{bT_c}t = S_0 + \frac{a^2}{bT_c^2}(T - T_c) \quad (2.26)$$

Il calore specifico a pressione costante nella fase rotta è dato da

$$c_P = T \left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_P = c_P^0 + \frac{a^2}{bT_c^2}T \quad (2.27)$$

mentre nella fase simmetrica

$$c_P = c_P^0 \quad (2.28)$$

La discontinuità del calore specifico alla transizione è data da

$$\Delta c_P = \frac{a^2}{bT_c} \quad (2.29)$$

Inoltre per $T \rightarrow T_c^\pm$, c_P tende ad una costante. Pertanto gli esponenti critici associati sono nulli

$$\alpha = \alpha' = 0 \quad (2.30)$$

Dalla 2.25) si ottiene l'andamento del parametro d'ordine

$$\eta^2 = -\frac{a}{bT_c} (T - T_c) \quad (2.31)$$

da cui

$$\eta = \sqrt{\frac{a}{bT_c}} (T_c - T)^{1/2} \quad (2.32)$$

Pertanto

$$\beta = \frac{1}{2} \quad (2.33)$$

Per il calcolo della suscettività occorre riconsiderare la condizione di minimo a campo esterno non nullo

$$2at\eta + 2b\eta^3 - H = 0 \quad (2.34)$$

Dato che la suscettività è definita da

$$\chi = \left. \frac{\partial \eta(T, H)}{\partial H} \right|_{H=0} \quad (2.35)$$

possiamo calcolare la soluzione della 2.34) per piccoli H . Ponendo

$$\eta = \eta_0 + \chi H \quad (2.36)$$

e sostituendo nella 2.34) si ottiene

$$2at(\eta_0 + \chi H) + 2b(\eta_0^3 + 3\eta_0^2\chi H) - H = 0 \quad (2.37)$$

da cui

$$\begin{aligned} (2at + 2b\eta_0^2)\eta_0 &= 0 \\ 2at\chi + 6b\eta_0^2\chi - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Per $T > T_c$, si ha $\eta_0 = 0$ e quindi

$$\chi = \frac{1}{2at} \quad (2.39)$$

ovvero si trova che la suscettività nella fase simmetrica è

$$\chi = \frac{T_c}{2a(T - T_c)}, \quad T > T_c \quad (2.40)$$

con l'esponente critico dato da

$$\gamma = 1 \quad (2.41)$$

Nella fase rotta, $T < T_c$, η_0^2 è dato dalla 2.25) e sostituendo nell'equazione 2.38) per χ si ha

$$2at\chi - 6at\chi - 1 = 0 \quad (2.42)$$

e quindi

$$\chi = -\frac{1}{4at} \quad (2.43)$$

Pertanto la suscettività nella fase rotta è

$$\chi = -\frac{T_c}{4a(T - T_c)}, \quad T < T_c$$

con

$$\gamma' = 1 \quad (2.44)$$

Un ulteriore esponente critico che viene definito è quello legato al comportamento del campo H in funzione del parametro d'ordine lungo l'isoterma critica $t = 0$. Si ha immediatamente dalla 2.24)

$$H = 2b\eta^3 \quad (2.45)$$

definendo

$$H \approx \eta^\delta, \quad T \rightarrow T_c \quad (2.46)$$

vediamo che nella teoria di Landau,

$$\delta = 3 \quad (2.47)$$

III. TRANSIZIONI DEL 1⁰ ORDINE.

Come abbiamo visto la teoria di Landau è costruita sulla base dell'assunzione che il parametro d'ordine η sia piccolo nel limite $t \rightarrow 0$. Se la simmetria del problema non lo

impedisce potremmo dunque inserire anche termini dispari in η . Termini lineari in η non possono essere inseriti (a campo esterno nullo). Perchè altrimenti la condizione di minimo non potrebbe avere soluzione nulla per $T > T_c$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = a_1 + 2a_2\eta + 3a_3\eta^2 + \dots = 0 \quad (3.1)$$

O detto in altri termini si può sempre ridefinire il parametro d'ordine sottraendogli il suo valore nella fase rotta. Limitandosi ancora ad una espansione sino al 4^o ordine termini in η^3 non sono però esclusi a priori

$$\mathcal{L} = at\eta^2 + \frac{1}{2}b\eta^4 + C\eta^3 - H\eta \quad (3.2)$$

Limitiamoci ancora al caso $H = 0$. Il valore di equilibrio per il parametro d'ordine è dato da

$$2at\eta + 2b\eta^3 + 3C\eta^2 = 0 \quad (3.3)$$

e quindi si hanno le soluzioni

$$\eta = 0, \quad 2b\eta^2 + 3C\eta + 2at = 0 \quad (3.4)$$

Per la soluzione non nulla troviamo

$$\eta = -\frac{3C}{4b} \pm \sqrt{\left(\frac{3C}{4b}\right)^2 - \frac{a}{b}t} \quad (3.5)$$

È conveniente definire

$$c = \frac{3C}{4b} \quad (3.6)$$

e quindi

$$\eta = -c \pm \sqrt{c^2 - \frac{a}{b}t} \quad (3.7)$$

La funzione di Landau è

$$\mathcal{L} = at\eta^2 + \frac{1}{2}b\eta^4 + \frac{4}{3}bc\eta^3 \quad (3.8)$$

e

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \eta^2} = 2at + 6b\eta^2 + 8bc\eta \quad (3.9)$$

La soluzione $\eta = 0$ è un minimo per $T > T_c$ ($t > 0$). Soluzioni non nulle possono esistere solo se è soddisfatta la condizione

$$c^2 - \frac{a}{b}t \geq 0 \quad (3.10)$$

Ovvero per

$$t \leq t^*, \quad t^* = \frac{bc^2}{a} \quad (3.11)$$

Dato che $t^* > 0$, si hanno soluzioni non nulle anche nell'intervallo $0 \leq t \leq t^*$. Senza perdere di generalità possiamo fissare $c > 0$, allora per $t = t^*$ si ha $\eta = -c$. Quindi dalla 3.9) si ha

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \eta^2} \right|_{t=t^*} = 0 \quad (3.12)$$

Questo è un punto di flesso orizzontale. Al di sotto della temperatura corrispondente a t^* si sviluppa allora un secondo minimo. Infatti ricavando η^2 dalla condizione di stazionarietà 3.4)

$$2at + 2b\eta^2 + 4bc\eta = 0 \quad (3.13)$$

e sostituendolo nelle derivata seconda di \mathcal{L} si ha

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \eta^2} = -4at - 4bc\eta = -4at - 4bc \left(-c \pm \sqrt{c^2 - \frac{a}{b}t} \right) \quad (3.14)$$

dove si è fatto uso della 3.7). Questa espressione può essere riscritta nella forma

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \eta^2} = -4a(t - t^*) \mp 4\sqrt{abc^2}\sqrt{t^* - t} = 4a[(t^* - t) \mp \sqrt{t^*}\sqrt{t^* - t}] \quad (3.15)$$

Vediamo che per $t < t^*$ esiste un secondo minimo per la soluzione con il segno inferiore, cioè per

$$\bar{\eta} = -c - \sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{t^* - t} = -c \left(1 + \sqrt{1 - \frac{t}{t^*}} \right) \quad (3.16)$$

Questo secondo minimo non sarà il minimo assoluto finché non si raggiunge la temperatura corrispondente ad un valore \bar{t} tale che

$$\mathcal{L}[\eta = 0] = \mathcal{L}[\eta = \bar{\eta}] \quad (3.17)$$

Ovvero (avendo qui ignorato il termine a_0) quando

$$\mathcal{L}[\bar{\eta}] = 0 \quad (3.18)$$

Vale a dire

$$a\bar{t}\bar{\eta}^2 + \frac{1}{2}b\bar{\eta}^4 + \frac{4}{3}bc\bar{\eta}^3 = 0 \quad (3.19)$$

Sostituendo per $b\bar{\eta}^2$ il valore che si ottiene dalla 3.13) si ottiene

$$\frac{1}{2}a\bar{t} + \frac{1}{3}bc\bar{\eta} = \frac{1}{2}a\bar{t} - \frac{1}{3}bc^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\bar{t}}{t^*}} \right) = 0 \quad (3.20)$$

ovvero

$$-\frac{1}{3}t^* \sqrt{1 - \frac{\bar{t}}{t^*}} = \frac{1}{3}t^* - \frac{1}{2}\bar{t} \quad (3.21)$$

Quadrando si arriva a

$$\frac{1}{4}\bar{t}^2 - \frac{2}{9}\bar{t}t^* = 0 \quad (3.22)$$

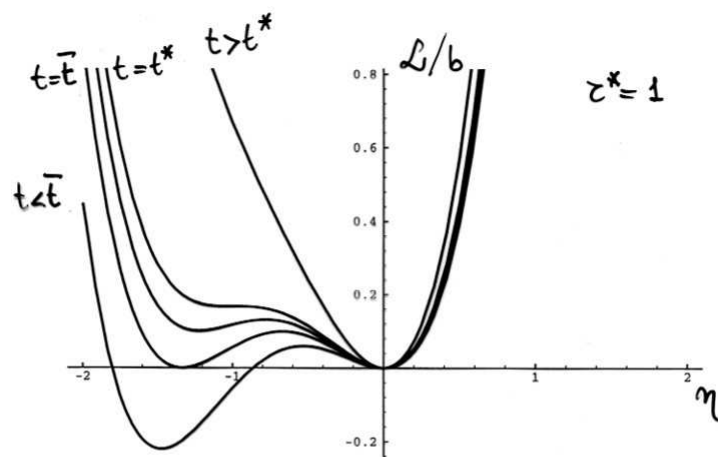
che ha due soluzioni

$$\bar{t} = 0, \quad \bar{t} = \frac{8}{9}t^* \quad (3.23)$$

Si verifica immediatamente che $\bar{t} = 0$ è una soluzione spuria e quindi

$$\bar{t} = \frac{8}{9}t^* \quad (3.24)$$

è il valore di t al quale i due minimi diventano uguali. Sotto \bar{t} infine $\bar{\eta}$ diventa il minimo assoluto. L'evoluzione di \mathcal{L} al variare di t è rappresentata in Fig. 3.1). In Fig. 3.2) abbiamo



$$\frac{\mathcal{L}}{b} = \left[z\eta^2 + \frac{1}{2}\eta^4 + \frac{4}{3}\sqrt{z^*}\eta^3 \right]$$

$$z = \frac{\rho}{b}t, \quad z^* = \frac{\rho}{b}t^*$$

Fig. 3.1

invece rappresentato il parametro d'ordine in funzione di t . Questa analisi mostra dunque che la transizione avviene con una discontinuità nel parametro d'ordine e si tratta quindi di una transizione del primo ordine. Allo stesso tempo vediamo che non è corretto fare uso della

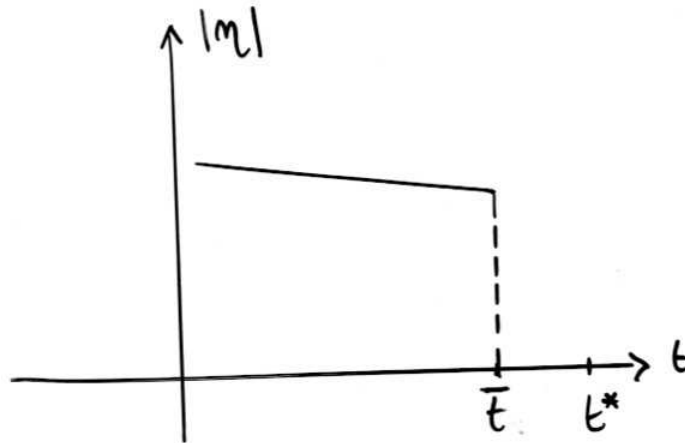


Fig. 3.2

teoria fenomenologica di Landau basata su un'espansione per valori piccoli del parametro d'ordine in vicinanza della temperatura critica.

In definitiva, se la simmetria non costringe il parametro C ad annullarsi si può avere una transizione di fase del primo ordine. Il fatto che C sia diverso da zero non garantisce in generale la presenza di una transizione del primo ordine. Per esempio il minimo secondario potrebbe cadere in una zona non fisica per il parametro d'ordine. Occorre anche osservare che le fluttuazioni possono giocare un ruolo determinante nel cambiare l'ordine di una transizione.

IV. SISTEMI INOMOGENEI.

Fino a qui abbiamo considerato sistemi omogenei nei quali il parametro d'ordine è costante all'equilibrio. Più generalmente si può pensare di avere un parametro d'ordine che sia una funzione del punto, $\eta(\vec{r})$. Questo può succedere, ad esempio, nel caso in cui si abbia un campo esterno $H(\vec{r})$. Come vedremo, le correlazioni spaziali, $\langle \eta(\vec{r})\eta(\vec{r}') \rangle$, aumentano per $T \rightarrow T_c$. Più in generale queste correlazioni sono caratterizzate dalla lunghezza di correlazione $\xi(T)$ che è una funzione della temperatura. A livello microscopico il parametro d'ordine è una quantità con grosse fluttuazioni, basta pensare alla magnetizzazione per un reticolo di spin. Se allora si vuole avere a che fare con delle quantità che siano funzioni

abbastanza smooth del punto, occorrerà dividere il sistema in parti (blocchi) di dimensione lineare $\Lambda^{-1} \approx \xi$. All'interno di un blocco si hanno forti correlazioni e quindi il parametro d'ordine non subirà grossissime fluttuazioni ed è ragionevole definire un parametro d'ordine locale ottenuto da una media effettuata nel blocco. Per esempio, se il sistema è un reticolo di size a , avremo

$$\eta_\Lambda(\vec{r}) = \frac{\Lambda^{-d}}{a^d} \sum_{i \in \vec{r}} \langle \eta(\vec{r}_i) \rangle \quad (4.1)$$

dove d è il numero di dimensioni spaziali, Λ^{-d}/a^d è il numero di celle sulle quali stiamo mediando e \vec{r} è il punto centrale del blocco. In questo modo inseriremo sempre un gran numero di siti nella media, dato che per $T \rightarrow T_c$ si ha $\xi(T) \rightarrow \infty$ (vedi Sezione 6) e quindi dato che $\Lambda^{-1} \approx \xi(T)$, avremo sempre

$$a \ll \Lambda^{-1} \approx \xi(T) \quad (4.2)$$

$\eta_\Lambda(\vec{r})$ è chiamato il parametro d'ordine coarse-grained. Così facendo abbiamo inibito tutte le fluttuazioni su scale più piccole di Λ^{-1} , o equivalentemente abbiamo sommato su tutti i modi di Fourier con impulsi maggiori di Λ . Tutto questo procedimento è evidentemente sensibile alla scelta del cut-off Λ , d'altra parte i risultati saranno significativi sul piano fisico solo se la dipendenza non è troppo accentuata. Supponendo che questo sia possibile non è necessario mantenere una dipendenza esplicita dal cut-off. Nasce adesso il problema di definire una adeguata funzione di Landau. Evidentemente la scelta

$$L = \sum_{\vec{r}} \mathcal{L}(\eta_\Lambda(\vec{r})) \quad (4.3)$$

non va bene, in quanto la minimizzazione darebbe lo stesso valore di equilibrio in ogni blocco. D'altra parte sarà energeticamente sfavorevole avere il parametro d'ordine troppo diverso da un blocco all'altro. Si può allora aggiungere alla 4.3) un termine di penalizzazione per la differenza dei parametri d'ordine in blocchi vicini. La scelta più semplice risulta

$$\sum_{\vec{r}} \sum_{\vec{\delta}} \frac{\gamma'}{2} \left(\frac{\eta_\Lambda(\vec{r}) - \eta_\Lambda(\vec{r} + \vec{\delta})}{\Lambda^{-1}} \right)^2 \quad (4.4)$$

dove $\vec{\delta}$ è un vettore di ordine Λ^{-1} che misura la distanza tra due blocchi. γ' è una costante positiva in modo che una differenza del parametro d'ordine tra due blocchi vicini faccia crescere l'energia libera di Landau. Poiché, per ipotesi, $\eta_\Lambda(\vec{r})$ è una funzione smooth,

potremo approssimare la 4.4) con il gradiente, ottenendo infine

$$L = \int d^d \vec{r} \left[\frac{1}{2} \gamma (\vec{\nabla} \eta_\Lambda(\vec{r}))^2 + \mathcal{L}(\eta_\Lambda(\vec{r})) \right] \quad (4.5)$$

L è detta l'energia libera coarse-grained o l'hamiltoniana effettiva.

V. INTERPRETAZIONE DELL'ENERGIA LIBERA DI LANDAU.

Per capire il significato dell'energia libera di Landau consideriamo un sistema magnetico. In questo caso l'energia libera di Gibbs risulta data da

$$\Gamma(M) = F(h(M)) + NMh(M) \quad (5.1)$$

dove F è l'energia libera, M è la magnetizzazione media per sito e N il numero di siti. $h(M)$ è il campo necessario per avere la magnetizzazione M e si ha (vedi dopo)

$$\frac{\partial F}{\partial h} = -NM \quad (5.2)$$

Ricordiamo che

$$e^{-\beta F(h)} = \text{Tr} \left(e^{-\beta(H - hN\mathcal{M})} \right) \quad (5.3)$$

dove \mathcal{M} è la magnetizzazione microscopica e quindi

$$M = \langle \mathcal{M} \rangle \quad (5.4)$$

Si ha poi

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial M} = \frac{\partial F}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial M} + Nh + NM \frac{\partial h}{\partial M} = Nh \quad (5.5)$$

Dunque quando il campo esterno è nullo ($h = 0$), la minimizzazione di Γ determina lo stato del sistema. Però l'energia libera di Gibbs, Γ , e l'energia libera di Landau, L , non possono essere la stessa cosa. Infatti

- 1) Γ è una funzione convessa di M , mentre L non lo è.
- 2) Γ è una funzione termodinamica e quindi parlare di una magnetizzazione media funzione del punto $M(\vec{r})$ non ha senso in questo contesto. Il calcolo di Γ coinvolge una operazione di traccia che include anche le integrazioni spaziali. La traccia non dipende più dalle configurazioni microscopiche.

Per dimostrare che Γ è convessa iniziamo a derivare rispetto al campo magnetico l'energia libera

$$F(h) = -\frac{1}{\beta} \log \text{Tr} \left[e^{-\beta(H - hN\mathcal{M})} \right] \quad (5.6)$$

si ottiene

$$\frac{\partial F}{\partial h} = -\frac{1}{\beta} \frac{\text{Tr} \left[\beta N \mathcal{M} e^{-\beta(H - hN\mathcal{M})} \right]}{\text{Tr} \left[e^{-\beta(H - hN\mathcal{M})} \right]} = -N \langle \mathcal{M} \rangle = -NM \quad (5.7)$$

Calcolando poi la derivata seconda si ottiene

$$\frac{\partial^2 F}{\partial h^2} = -\frac{1}{\beta} \frac{\text{Tr} \left[(\beta N \mathcal{M})^2 e^{-\beta(H - hN\mathcal{M})} \right]}{\text{Tr} \left[e^{-\beta(H - hN\mathcal{M})} \right]} + \frac{1}{\beta} \frac{\text{Tr} \left[\beta N \mathcal{M} e^{-\beta(H - hN\mathcal{M})} \right]^2}{\text{Tr} \left[e^{-\beta(H - hN\mathcal{M})} \right]^2} \quad (5.8)$$

e quindi

$$\frac{\partial^2 F}{\partial h^2} = -\beta N^2 (\langle \mathcal{M}^2 \rangle - \langle \mathcal{M} \rangle^2) \quad (5.9)$$

D'altra parte si deve avere

$$\langle (x - \mathcal{M})^2 \rangle \geq 0, \quad \forall x \quad (5.10)$$

da cui

$$\langle \mathcal{M} \rangle^2 \leq \langle \mathcal{M}^2 \rangle \quad (5.11)$$

e

$$\frac{\partial^2 F}{\partial h^2} \leq 0 \quad (5.12)$$

Segue allora, differenziando la 5.5) rispetto a M

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial M^2} = N \frac{\partial h}{\partial M} \quad (5.13)$$

Usando infine

$$\frac{\partial M}{\partial h} = -\frac{1}{N} \frac{\partial^2 F}{\partial h^2} \quad (5.14)$$

si ottiene

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial M^2} = -N^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial h^2} \right)^{-1} \geq 0 \quad (5.15)$$

E quindi Γ è una funzione convessa di M . Un altro modo per vedere ciò è di osservare che Γ viene calcolata al valore di M che soddisfa

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial M} = Nh \quad (5.16)$$

Quindi se il valore di M^2 per $T < T_c$ è dato da M_s^2 , avremo

$$NM_s = -\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\partial F}{\partial h}, \quad -NM_s = -\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\partial F}{\partial h} \quad (5.17)$$

Quindi il grafico di M in funzione di h sarà come in Fig. 5.1). Vediamo che si ha $h = 0$ per

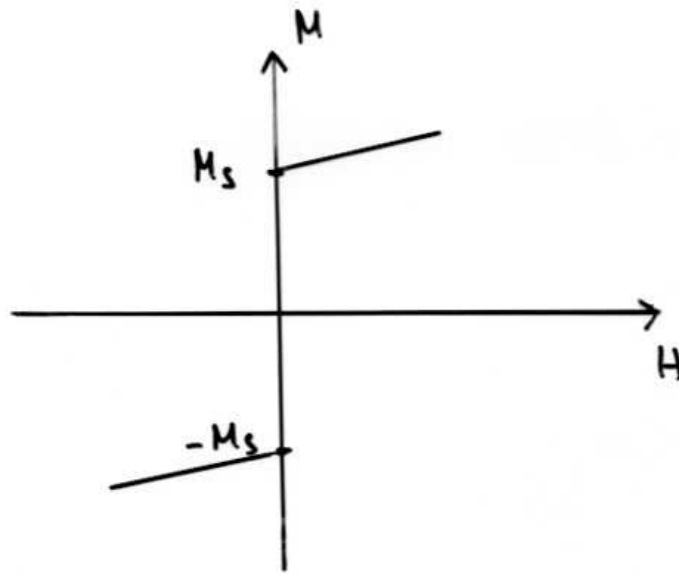


Fig. 5.1

$$-M_s \leq M \leq M_s \text{ e}$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial M} = 0, \quad \text{per } -M_s \leq M \leq M_s \quad (5.18)$$

Dunque se si confrontano Γ e \mathcal{L} , come in Fig. 5.2), si vede che \mathcal{L} può essere una buona descrizione di Γ solo fuori dall'intervallo $(-M_s, M_s)$, o sopra la temperatura critica.

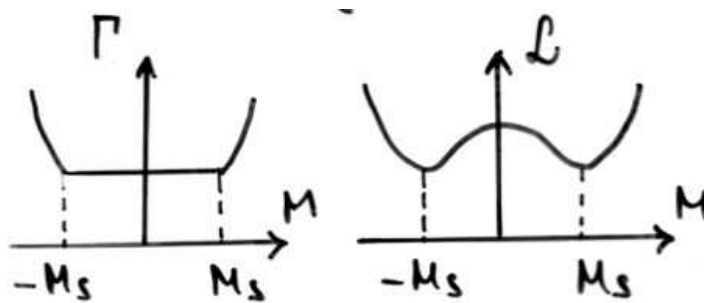


Fig. 5.2

Per capire cosa è l'energia libera di Landau, rimanendo sempre in questo esempio di un

sistema di spin, notiamo che formalmente essa è definita da

$$e^{-\beta L(M_\Lambda)} = \text{Tr} \left[e^{-\beta H} \delta \left(\sum_{i \in \vec{r}} S_i - N_\Lambda M_\Lambda(\vec{r}) \right) \right] = \text{Tr}' e^{-\beta H} \quad (5.19)$$

dove la traccia con apice è una abbreviazione che sottointende una traccia parziale sui soli gradi di libertà di spin che soddisfano la condizione

$$\sum_{i \in \vec{r}} S_i = N_\Lambda M_\Lambda(\vec{r}) \quad (5.20)$$

Evidentemente facendo la somma parziale non si ottiene la funzione di partizione del sistema. Se indichiamo con $\{\bar{S}_i\}$ le configurazioni microscopiche compatibili con $M_\Lambda(\vec{r})$ e con $\{S_i^*\}$ quelle non compatibili, cioè quelle che danno una diversa M_Λ , possiamo scrivere

$$\sum = \sum_{\{S_i^*\}} \sum_{\{\bar{S}_i\}} \quad (5.21)$$

ed avremo

$$Z = e^{-\beta F} = \text{Tr} e^{-\beta H} = \sum_{\{S_i\}} e^{-\beta H} = \sum_{\{S_i^*\}} \sum_{\{\bar{S}_i\}} e^{-\beta H} = \sum_{\{S_i^*\}} e^{-\beta L(M_\Lambda)} \quad (5.22)$$

Ma sommare su $\{S_i^*\}$ è equivalente a sommare su tutte le possibili configurazioni $\{M_\Lambda\}$ e quindi

$$Z = \int \mathcal{D}M_\Lambda e^{-\beta L(M_\Lambda)} \quad (5.23)$$

Quindi la funzione di partizione è la somma sui cammini $\{M_\Lambda\}$ relativa all'azione euclidea

$$S_E = \beta L(M_\Lambda) \quad (5.24)$$

Questo tipo di approccio, in cui L viene calcolata integrando sui gradi di libertà microscopici non viene generalmente seguito (salvo alcuni casi particolarmente semplici), ma si segue piuttosto un approccio fenomenologico in cui L viene postulata.

Referenze

N. Goldenfeld, Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group, Addison-Wesley.

VI. LE FUNZIONI DI CORRELAZIONE.

Come abbiamo visto, l'energia libera di Landau è data dall'espressione

$$L = \int d^d \vec{r} \left[\frac{\gamma}{2} (\vec{\nabla} \eta)^2 + at\eta^2 + \frac{1}{2} b\eta^4 - H\eta \right] \quad (6.1)$$

e la funzione di partizione

$$Z[H] = \int \mathcal{D}(\eta) e^{-\beta L} \quad (6.2)$$

Nel limite di volume infinito la funzione di partizione coincide con il funzionale generatore euclideo definito nella 14.25.I). Dunque l'energia libera coincide formalmente con il funzionale generatore delle funzioni di Green connesse. Infatti si ha

$$e^{-\beta F} = \int \mathcal{D}(\eta) e^{-\beta L} \quad (6.3)$$

da confrontarsi con

$$e^{-W_E} = \int \mathcal{D}(\eta) e^{-S_E} \quad (6.4)$$

Tramite F siamo in grado di calcolare il valor medio del parametro d'ordine e le correlazioni. Infatti da

$$F = -\frac{1}{\beta} \log \int \mathcal{D}(\eta) e^{-\beta L_0 + \beta \int d^d \vec{r} H\eta} \quad (6.5)$$

si trova subito

$$\langle \eta(\vec{r}) \rangle = -\frac{\delta F}{\delta H(\vec{r})} \quad (6.6)$$

Si definisce poi la suscettività isoterma generalizzata

$$\chi_T(\vec{r}, \vec{r}') = \left. \frac{\delta \langle \eta(\vec{r}) \rangle}{\delta H(\vec{r}')} \right|_{H=0} \quad (6.7)$$

da cui

$$\chi_T(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{\delta^2 F}{\delta H(\vec{r}) \delta H(\vec{r}')} = \beta [\langle \eta(\vec{r}) \eta(\vec{r}') \rangle - \langle \eta(\vec{r}) \rangle \langle \eta(\vec{r}') \rangle] \equiv \beta G(\vec{r}, \vec{r}') \quad (6.8)$$

dove $G(\vec{r}, \vec{r}')$ è la funzione di correlazione. Nel caso di un sistema invariante per traslazioni avremo

$$\langle \eta(\vec{r}) \rangle = \text{costante}, \quad \forall \vec{r} \quad (6.9)$$

e

$$\chi_T(\vec{r}, \vec{r}') = \chi_T(\vec{r} - \vec{r}') = \beta G(\vec{r} - \vec{r}') \quad (6.10)$$

Il calcolo della funzione di correlazione è molto semplice se si trascurano le fluttuazioni. In questo caso la somma sui cammini, come in Sezione 21 è dominata dalla soluzione dell'equazione del moto classica

$$\frac{\delta L}{\delta \eta(\vec{r})} = -\gamma \vec{\nabla}^2 \eta + 2at\eta + 2b\eta^3 - H = 0 \quad (6.11)$$

La funzione di correlazione può poi essere calcolata tramite differenziazione funzionale di questa equazione. Si ottiene

$$(-\gamma \vec{\nabla}^2 + 2at + 6b\eta^2)\beta G(\vec{r} - \vec{r}') = \delta^d(\vec{r} - \vec{r}') \quad (6.12)$$

dove abbiamo supposto di avere un sistema traslazionamlnmente invariante. In questa ipotesi η è dato dal valore di equilibrio che abbiamo ottenuto precedentemente ed avremo quindi le seguenti due possibilità

1) $t > 0, \eta = 0$

$$(-\vec{\nabla}^2 + 2\frac{a}{\gamma}t)G(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{\beta\gamma}\delta^d(\vec{r} - \vec{r}') \quad (6.13)$$

Definiamo la lunghezza di correlazione

$$\xi_+(t) = \left(\frac{\gamma}{2at}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.14)$$

allora procedendo come in Sezione 21 si ottiene

$$G(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{\beta\gamma} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + \xi_+^{-2}} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} \quad (6.15)$$

2) $t < 0, \eta^2 = -at/b$

$$(-\vec{\nabla}^2 - 4\frac{a}{\gamma}t)G(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{\beta\gamma}\delta^d(\vec{r} - \vec{r}') \quad (6.16)$$

La lunghezza di correlazione è ora

$$\xi_-(t) = \left(-\frac{\gamma}{4at}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.17)$$

Alla transizione $t \rightarrow 0$ si ha

$$\xi_{\pm} \rightarrow \infty \quad (6.18)$$

Pertanto a $t = 0$

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{\beta\gamma} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (6.19)$$

Introducendo il modulo di \vec{r} , $r = |\vec{r}|$, e posto $y = kr$

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{\beta\gamma} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2} e^{-ikr \cos \theta} = \frac{1}{\beta\gamma r^{d-2}} \int \frac{d^d y}{(2\pi)^d} \frac{1}{y^2} e^{-iy \cos \theta} \quad (6.20)$$

Quindi

$$G(\vec{r}, T_c) \approx \frac{1}{r^{d-2}} \quad (6.21)$$

Generalmente si introducono altri esponenti critici collegati alle correlazioni. Precisamente

$$\begin{aligned} \text{lunghezza di correlazione} \quad \xi_+ &= c_+(T - T_c)^{-\nu}, \quad T > T_c \\ \xi_- &= c_-(T_c - T)^{-\nu'}, \quad T < T_c \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$\text{funzione di correlazione} \quad G(\vec{r}, T_c) = gr^{-(d-2+\eta)}$$

Nel caso in esame segue

$$\nu = \nu' = \frac{1}{2}, \quad \eta = 0 \quad (6.23)$$

La suscettività statica si può ottenere dalla trasformata di Fourier dell'equazione per G nel limite $k \rightarrow 0$

$$(k^2 + \xi^{-2})\hat{G}(k) = \frac{1}{\beta\gamma} \quad (6.24)$$

da cui

$$\chi_T = \beta\hat{G}(0) = \frac{\xi^2}{\gamma} \quad (6.25)$$

Pertanto in vicinanza della temperatura critica, come già visto in precedenza,

$$\chi_T \approx \frac{1}{t} \quad (6.26)$$

Vediamo anche

$$\gamma = \gamma' = 2\nu = 1 \quad (6.27)$$

Per calcolare il comportamento della funzione di correlazione ai vari regimi è opportuno riscriverla nella così detta rappresentazione di tempo proprio

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{\beta\gamma} \int_0^\infty dt \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r} - t(q^2 + \xi^{-2})} \quad (6.28)$$

Adesso è possibile effettuare l'integrazione gaussiana sugli impulsi

$$\begin{aligned} G(\vec{r}) &= \frac{1}{\beta\gamma} \int_0^\infty dt \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} e^{-t(\vec{q} + i\vec{r}/2t)^2 - t\xi^{-2} - r^2/4t} = \\ &= \frac{1}{\beta\gamma} \int_0^\infty \frac{dt}{2^d \pi^{d/2}} t^{-d/2} e^{-t\xi^{-2} - r^2/4t} \end{aligned} \quad (6.29)$$

Da questa espressione possiamo ottenere delle valutazioni approssimate sia alla transizione, $\xi \rightarrow \infty$, sia a grandi distanze, $r \gg \xi$. Nel primo caso si ha

$$G(\vec{r}) \approx \frac{1}{\beta\gamma} \int_0^\infty \frac{dt}{2^d \pi^{d/2}} t^{-d/2} e^{-r^2/4t} \quad (6.30)$$

Ponendo $x = r^2/4t$ si ha

$$\begin{aligned} G(\vec{r}) &\approx \frac{1}{\beta\gamma} \int_0^\infty \frac{dx}{2^d \pi^{d/2}} \left(\frac{r^2}{4}\right) x^{-2} \left(\frac{4x}{r^2}\right)^{d/2} e^{-x} = \\ &= \frac{1}{\beta\gamma} \frac{1}{4\pi^{d/2}} \frac{1}{r^{d-2}} \int_0^\infty dx x^{d/2-2} e^{-x} = \\ &= \frac{1}{\beta\gamma} \frac{1}{4\pi^{d/2}} \frac{1}{r^{d-2}} \Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right), \quad (d > 2) \end{aligned} \quad (6.31)$$

Per $d = 2$ la funzione di correlazione ha una divergenza. Con una definizione opportuna si mostra che si ha un comportamento logaritmico. Il caso di grandi r si può approssimare facendo uso del punto di sella. Posto

$$f(t) = -\frac{d}{2} \log t - \frac{t}{\xi^2} - \frac{r^2}{4t} \quad (6.32)$$

si ha

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{\beta\gamma} \int_0^\infty \frac{dt}{2^d \pi^{d/2}} e^{f(t)} \quad (6.33)$$

Il punto sella è determinato da

$$0 = f'(t) = -\frac{d}{2t} - \frac{1}{\xi^2} + \frac{r^2}{4t^2} \quad (6.34)$$

che ha per soluzioni

$$t = \left(\frac{-d \pm \sqrt{d^2 + 4r^2/\xi^2}}{4} \right) \xi^2 \quad (6.35)$$

e quindi per $r \gg \xi$

$$t \rightarrow \pm \frac{r\xi}{2} \quad (6.36)$$

La derivata seconda di $f(t)$ è

$$f''(t) = \frac{d}{2t^2} - \frac{r^2}{2t^3} \rightarrow -\frac{r^2}{2t^3} \quad (6.37)$$

Per avere $f''(t) < 0$, occorre che la soluzione sia positiva. Quindi il punto sella è

$$t_0 = \frac{r\xi}{2} \quad (6.38)$$

Si ha allora

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{\beta\gamma} \frac{1}{2^d \pi^{d/2}} e^{f(t_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{\frac{1}{2} f''(t_0)(t-t_0)^2} = \frac{1}{\beta\gamma} \frac{1}{2^d \pi^{d/2}} e^{f(t_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(t_0)|}} \quad (6.39)$$

da cui

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{\beta\gamma} \frac{1}{2^d \pi^{d/2}} e^{-r/\xi} \left(\frac{r\xi}{2}\right)^{-d/2} \sqrt{\frac{\pi r \xi^3}{2}} = \frac{1}{\beta\gamma} \frac{\pi^{(1-d)/2}}{2^{(d+1)/2}} \frac{1}{\xi^{(d-3)/2}} \frac{e^{-r/\xi}}{r^{(d-1)/2}} \quad (6.40)$$

Dunque fuori della temperatura critica le fluttuazioni decadono esponenzialmente su scale $r \approx \xi$.

VII. FLUTTUAZIONI E IL CRITERIO DI LANDAU-GINZBURG.

Ci possiamo domandare se la teoria di Landau è consistente. Infatti, come abbiamo visto si ignorano completamente le fluttuazioni del parametro d'ordine. Un criterio per rispondere alla domanda è dunque di cercare di vedere quando questo sia possibile. Infatti è possibile confrontare il valore del quadrato del parametro d'ordine integrato su una regione di volume $V \approx \xi^d$, dove esiste una correlazione diversa da zero tra i campi, con l'integrale nella stessa regione dello scarto quadratico medio del parametro d'ordine (o della funzione di correlazione, vedi eq. 6.8)). Per $T < T_c$ si ha (dalla 2.31))

$$\eta^2 = -\frac{a}{b}t \quad (7.1)$$

e quindi

$$\int_V d^d \vec{r} \eta^2 = \frac{a}{b} \xi_-(t)^d |t| \quad (7.2)$$

Ricordando dalla 6.17)

$$\xi_-(t) = \left(\frac{-\gamma}{4at}\right)^{\frac{1}{2}} = \xi_-(1)|t|^{-\frac{1}{2}} \quad (7.3)$$

Segue dunque

$$\int_V d^d \vec{r} \eta^2 = \frac{a}{b} \xi_-(1)^d |t|^{(2-d)/2} \quad (7.4)$$

Dobbiamo poi calcolare l'integrale della funzione di correlazione. L'integrale può adesso essere esteso fino all'infinito dato che la funzione di correlazione decade esponenzialmente su scale ξ . Dunque

$$\int_V d^d \vec{r} G(\vec{r}) = \hat{G}(0) = \frac{\xi_-(t)^2}{\beta\gamma} \quad (7.5)$$

dove si è fatto uso della (6.25). Quindi

$$\int_V d^d \vec{r} G(\vec{r}) = \frac{1}{4a\beta|t|} \quad (7.6)$$

Il rapporto delle due quantità di interesse è allora

$$\rho = \frac{\int_V d^d \vec{r} G(\vec{r})}{\int_V d^d \vec{r} \eta^2} = \left(\frac{1}{4a\beta|t|} \right) \left(\frac{b}{a} \frac{1}{\xi_-(1)^d} \frac{1}{|t|^{(2-d)/2}} \right) = \frac{b}{4\beta a^2} \frac{1}{\xi_-(1)^d} \frac{1}{|t|^{(4-d)/2}} \quad (7.7)$$

Ricordando la 2.29) che esprime a^2/b in termine della discontinuità nel calore specifico alla transizione

$$\Delta c_P = \frac{a^2}{bT_c} = k\beta_c \frac{a^2}{b} \quad (7.8)$$

segue

$$\rho = \frac{k}{4\Delta c_P} \frac{\beta_c}{\beta} \frac{1}{\xi_-(1)^d} \frac{1}{|t|^{(4-d)/2}} \approx \frac{k}{4\Delta c_P} \frac{1}{\xi_-(1)^d} \frac{1}{|t|^{(4-d)/2}} \quad (7.9)$$

dove abbiamo approssimato $\beta \approx \beta_c$. La richiesta $\rho \ll 1$ implica

$$\left| \frac{T - T_c}{T_c} \right|^{(4-d)/2} \gg \frac{k}{4\Delta c_P} \frac{1}{\xi_-(1)^d} \equiv t_{LG}^{(4-d)/2} \quad (7.10)$$

dove per $d \neq 4$ abbiamo introdotto la temperatura ridotta di Landau-Ginzburg, t_{LG} . Dunque per $4 - d > 0$ questa condizione richiede $|t| \gg t_{LG}$. Chiaramente questa condizione non è soddisfatta nel limite $t \rightarrow 0$. Vediamo infatti dalla 7.7) che le fluttuazioni crescono come $1/|t|^{(4-d)/2}$. Viceversa, per $4 - d < 0$, le fluttuazioni vanno a zero per $t \rightarrow 0$. Si hanno dunque le seguenti tre possibilità:

1) $d > 4$. Il criterio di Landau-Ginzburg è sempre soddisfatto per $t \rightarrow 0$, la teoria di Landau riproduce gli esponenti critici corretti.

2) $d < 4$. Il criterio di Landau-Ginzburg non è mai soddisfatto. La teoria di Landau non è consistente per $t \rightarrow 0$. Occorre però osservare che t_{LG} può essere così piccolo che l'intervallo di temperature attorno al punto critico in cui la teoria di Landau non si applica è praticamente trascurabile. Questo succede, per esempio, nel caso della superconduttività. Infatti in questo caso si ha $t_{LG} \approx 10^{-16}$. Questa stima si può fare osservando che $\Delta C \xi(1)^d$ è la quantità di calore nel volume V che dovrebbe essere circa ugual al numero di gradi di libertà contenuti nel volume, moltiplicata per la costante di Boltzman. Quindi $\xi(1)\Delta C/k$ rappresenta il numero di gradi di libertà in una regione di dimensioni lineari $\xi(1)$. Per

tipici sistemi solidi si ha che se $\xi(1) \approx N \text{ \AA}$, il numero di gradi di libertà è circa N^d . Per superconduttori in tre dimensioni si ha $\xi(1) \approx 5 \cdot 10^2 \text{ \AA}$, segue quindi $t_{LG}^{1/2} \approx 10^{-8}$.

3) $d = 4$. Sebbene ρ possa essere più piccolo di uno per valori opportuni del salto nel calore specifico e della lunghezza di correlazione ben fuori del punto critico, in generale si hanno correzioni logaritmiche alle fluttuazioni che divergono nel limite $t \rightarrow 0$. Quindi, anche per $d = 4$ la teoria di Landau non è generalmente applicabile (possono esistere però delle eccezioni).

Questo andamento con le dimensioni dello spazio dipende, come vedremo, dal fatto che per $d > 4$ il termine di interazione quartico $b\eta^4$ diventa trascurabile per $t \rightarrow 0$, mentre diverge per $d < 4$. In particolare il valore della dimensione critica $d_c = 4$ alla quale la teoria di Landau cessa di essere consistente dipende sia dalla forma specifica della funzione di Landau e dal fatto che gli esponenti critici sono quelli classici. Se gli esponenti critici sono invece quelli generici introdotti nelle sezioni precedenti, allora si ha

$$\int_V d^d \vec{r} \eta^2 = \frac{a}{b} \xi^d |t|^{2\beta} = \frac{a}{b} \xi(1)^d |t|^{2\beta - \nu d} \quad (7.11)$$

e

$$\int_V d^d \vec{r} G(\vec{r}) = \frac{\chi_T}{\beta} = \frac{\chi_T(1)}{\beta} |t|^{-\gamma} \quad (7.12)$$

da cui

$$\rho = \frac{\chi_T(1)b}{\beta a \xi(1)^d} |t|^{\nu d - \gamma - 2\beta} \quad (7.13)$$

Pertanto il criterio è

$$|t|^{2\beta + \gamma - \nu d} \gg \frac{\chi_T(1)b}{\beta a \xi(1)^d} \equiv t_{LG}^{2\beta + \gamma - \nu d} \quad (7.14)$$

La teoria di Landau è allora valida solo in dimensioni superiori alla dimensione critica d_c definita da

$$d_c = \frac{2\beta + \gamma}{\nu} \quad (7.15)$$

Come commento finale osserviamo che questo calcolo serve solo a convincere che in certe situazioni la teoria di Landau non è applicabile, ma il calcolo fatto della regione di applicabilità non è certamente rigoroso. In particolare, come vedremo nella prossima sezione, la temperatura critica è modificata dalle fluttuazioni. Infatti le fluttuazioni tendono a disordinare il sistema e quindi a temperatura fissata il sistema sarà più disordinato che non quando lo si descrive nell'ambito della teoria di Landau. Quindi le fluttuazioni tenderanno ad abbassare la temperatura critica.

VIII. IL MODELLO GAUSSIANO.

Calcoleremo adesso le correzioni alla teoria di Landau nel modello gaussiano. Si assume qui, come fatto in Sezione 6), che per un sistema uniforme il parametro d'ordine sia determinato dalla minimizzazione di \mathcal{L} e che sia quindi una costante. Dovremo calcolare l'integrale funzionale

$$Z = \int \mathcal{D}(\eta) e^{-\beta(L - \int d^d \vec{r} H\eta)} \quad (8.1)$$

È conveniente introdurre l'energia libera di Gibbs

$$\Gamma = F + \int d^d \vec{r} H\langle\eta\rangle \quad (8.2)$$

con

$$\langle\eta\rangle = -\frac{\delta F}{\delta H} \quad (8.3)$$

e

$$H = \frac{\delta \Gamma}{\delta \langle\eta\rangle} \quad (8.4)$$

Segue allora

$$e^{-\beta\Gamma} = \int \mathcal{D}(\eta) e^{-\beta L + \beta \int d^d \vec{r} H(\eta - \langle\eta\rangle)} \quad (8.5)$$

Traslando la variabile di integrazione $\eta \rightarrow \eta - \langle\eta\rangle$

$$e^{-\beta\Gamma} = \int \mathcal{D}(\eta) e^{-\beta L(\eta + \langle\eta\rangle) + \beta \int d^d \vec{r} H\eta} \quad (8.6)$$

Prendendo $H = 0$ è utile considerare una soluzione dell'equazione

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \langle\eta\rangle} = 0 \quad (8.7)$$

che sia vicina ad una soluzione $\bar{\eta}$ di

$$\frac{\delta L}{\delta \eta} = 0 \quad (8.8)$$

Avremo

$$e^{-\beta\Gamma} = \int \mathcal{D}(\eta) e^{-\beta L(\eta + \langle\eta\rangle)} \quad (8.9)$$

Se adesso espandiamo L attorno alle fluttuazioni η relative al background $\langle\eta\rangle$ definito dalla 8.7), all'ordine zero nelle fluttuazioni si ha

$$\Gamma^0(\langle\eta\rangle) = L(\langle\eta\rangle) \quad (8.10)$$

e quindi allo stesso ordine

$$\bar{\eta} = \langle \eta \rangle \quad (8.11)$$

All'ordine successivo avremo

$$\Gamma(\langle \eta \rangle) = L(\langle \eta \rangle) + \ell L_1(\langle \eta \rangle) \quad (8.12)$$

dove ℓ è un parametro fittizio introdotto per parametrizzare l'ordine dello sviluppo, Alla fine porremo $\ell = 1$. Possiamo adesso calcolare a quest'ordine la differenza tra $\langle \eta \rangle$ e $\bar{\eta}$

$$\langle \eta \rangle = \bar{\eta} + \eta_1 \quad (8.13)$$

Avremo

$$0 = \frac{\delta \Gamma}{\delta \langle \eta \rangle} = \frac{\delta L(\eta)}{\delta \eta} \Big|_{\bar{\eta} + \eta_1} + \frac{\delta L_1(\eta)}{\delta \eta} \Big|_{\bar{\eta} + \eta_1} \quad (8.14)$$

Sviluppando in serie di η_1 e ricordando la 8.8) si ottiene

$$\eta_1 \frac{\delta^2 L}{\delta \eta^2} \Big|_{\bar{\eta}} + \ell \frac{\delta L_1}{\delta \eta} \Big|_{\bar{\eta}} = 0 \quad (8.15)$$

da cui

$$\eta_1 = -\ell \frac{\delta L_1}{\delta \eta} \Big|_{\bar{\eta}} \left(\frac{\delta^2 L}{\delta \eta^2} \Big|_{\bar{\eta}} \right)^{-1} \quad (8.16)$$

Dunque

$$\langle \eta \rangle = \bar{\eta} + \mathcal{O}(\ell) \quad (8.17)$$

Torniamo adesso al calcolo del nostro integrale

$$e^{-\beta \Gamma} = \int \mathcal{D}(\eta) e^{-\beta L(\eta + \langle \eta \rangle)} = \int \mathcal{D}(\eta) e^{-\beta L(\eta + (\langle \eta \rangle - \bar{\eta}) + \bar{\eta})} \quad (8.18)$$

Ritraslando ancora la variabile

$$\eta \rightarrow \eta + \langle \eta \rangle - \bar{\eta} \quad (8.19)$$

ed espandendo L attorno a $\bar{\eta}$

$$e^{-\beta \Gamma} = e^{-\beta L(\bar{\eta})} \int \mathcal{D}(\eta) e^{-\frac{1}{2} \beta \frac{\delta^2 L}{\delta \eta^2} \Big|_{\bar{\eta}} \eta^2} \quad (8.20)$$

Si ha poi

$$L(\bar{\eta}) = L(\langle \eta \rangle + \bar{\eta} - \langle \eta \rangle) = L(\langle \eta \rangle) + (\bar{\eta} - \langle \eta \rangle) \frac{\delta L}{\delta \eta} \Big|_{\langle \eta \rangle} + \mathcal{O}(\ell^2) \quad (8.21)$$

Ma

$$\frac{\delta L}{\delta \eta} \Big|_{\langle \eta \rangle} = \frac{\delta L}{\delta \eta} \Big|_{\bar{\eta}} + \frac{\delta^2 L}{\delta \eta^2} \Big|_{\bar{\eta}} (\langle \eta \rangle - \bar{\eta}) = \frac{\delta^2 L}{\delta \eta^2} \Big|_{\bar{\eta}} (\langle \eta \rangle - \bar{\eta}) \quad (8.22)$$

Pertanto

$$L(\bar{\eta}) = L(\langle \eta \rangle) + \mathcal{O}(\ell^2) \quad (8.23)$$

Dunque al primo ordine in ℓ si ottiene

$$e^{-\beta\Gamma} = e^{-\beta L(\langle \eta \rangle)} \int \mathcal{D}(\eta) e^{-\frac{1}{2}\beta \frac{\delta^2 L}{\delta \eta^2} \Big|_{\bar{\eta}} \eta^2} \quad (8.24)$$

Il calcolo dell'integrale può essere fatto tramite la discretizzazione delle variabile di integrazione come fatto in Sezione 6, parte I). Il risultato è

$$e^{-\beta\Gamma} = e^{-\beta L} \left[\det \left(\frac{\beta}{2\pi} \frac{\delta^2 L}{\delta \eta^2} \Big|_{\bar{\eta}} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (8.25)$$

Possiamo poi usare

$$\left[\det \left(\frac{\beta}{2\pi} \frac{\delta^2 L}{\delta \eta^2} \Big|_{\bar{\eta}} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2} Tr \log \left(\frac{\beta}{2\pi} \frac{\delta^2 L}{\delta \eta^2} \Big|_{\bar{\eta}} \right)} \quad (8.26)$$

Le derivate di L sono date da

$$\frac{\delta L}{\delta \eta(\vec{r})} = [-\gamma \vec{\nabla}^2 + 2at + 2b\eta^2] \eta(\vec{r}) \quad (8.27)$$

e da

$$\frac{\delta^2 L}{\delta \eta(\vec{r}) \delta \eta(\vec{r}')} = [-\gamma \vec{\nabla}^2 + 2at + 6b\eta^2] \delta^d(\vec{r} - \vec{r}') \quad (8.28)$$

All'ordine che ci interessa abbiamo visto che si può usare $\bar{\eta}$ che è ottenuto ponendo uguale a zero la 8.27). L'idea dell'approssimazione gaussiana è di usare γ come parametro d'espansione. Per $\gamma = 0$ la soluzione è data dal campo medio e quindi

$$\frac{\delta^2 L}{\delta \eta^2} \Big|_{\bar{\eta}} = -\gamma [\vec{\nabla}^2 - \xi^{-2}] \delta^d(\vec{r} - \vec{r}') \quad (8.29)$$

con ξ l'appropriata lunghezza di correlazione a seconda che ci si trovi sopra o sotto T_c . Osserviamo anche che per $\gamma \rightarrow 0$ anche $\xi \rightarrow 0$. Dato che questo operatore è invariante per traslazioni (dipende solo dalla differenza delle coordinate), possiamo applicare le formule dell'Appendice, con il risultato

$$Tr \log \left(\frac{\beta}{2\pi} \frac{\delta^2 L}{\delta \eta^2} \Big|_{\bar{\eta}} \right) = V \int_0^\Lambda \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \log \left(\frac{\beta\gamma}{2\pi} (\vec{k}^2 + \xi^{-2}) \right) \quad (8.30)$$

dove il cut-off ultravioletto Λ è $\simeq 1/a$ (vedi Appendice). Pertanto

$$\Gamma = L + \frac{V}{2\beta} \int_0^\Lambda \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \log \left(\frac{\beta\gamma}{2\pi} (\vec{k}^2 + \xi^{-2}) \right) \quad (8.31)$$

o, più esplicitamente

$$\Gamma = \int_V d^d \vec{r} \left[\frac{1}{2} \gamma (\vec{\nabla} \eta)^2 + at\eta^2 + \frac{1}{2} b\eta^4 + \frac{1}{2\beta} \int_0^\Lambda \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \log \left(\frac{\beta\gamma}{2\pi} (\vec{k}^2 + \xi^{-2}) \right) \right] \quad (8.32)$$

Poiché la correzione all'approssimazione di Landau non dipende dai campi, gli esponenti critici legati al parametro d'ordine o alla funzione di correlazione non cambiano. L'unico esponente che subisce una variazione è quello legato al calore specifico

$$c = -\frac{T}{V} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta T^2} \quad (8.33)$$

Il contributo che proviene dall'energia libera di Landau non cambia e quindi la correzione al calore specifico è data da

$$\frac{\delta c}{T} = -\frac{\partial^2}{\partial T^2} \left[\frac{kT}{2} \int_0^\Lambda \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \log \left(\frac{\beta\gamma}{2\pi} (\vec{k}^2 + \xi^{-2}) \right) \right] \quad (8.34)$$

Effettuiamo il calcolo per $T > T_c$. In questo caso ricordiamo che $\xi^2 = \gamma/(2at)$. La derivata prima è data da (considerando solo i termini singolari)

$$\frac{k}{2} \int_0^\Lambda \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \log \left(\frac{\beta\gamma}{2\pi} (\vec{k}^2 + \xi^{-2}) \right) + \frac{kT}{2} \frac{2a}{\gamma T_c} \int_0^\Lambda \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\vec{k}^2 + \xi^{-2}}$$

da cui

$$\frac{\delta c}{T} = -k \frac{2a}{\gamma T_c} \int_0^\Lambda \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\vec{k}^2 + \xi^{-2}} + \frac{kT}{2} \frac{4a^2}{\gamma^2 T_c^2} \int_0^\Lambda \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\vec{k}^2 + \xi^{-2})^2}$$

Consideriamo prima il secondo integrale

$$I_2 = \int_0^\Lambda \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\vec{k}^2 + \xi^{-2})^2} \quad (8.35)$$

Riscalando l'impulso $\vec{q} = \xi \vec{k}$, segue

$$I_2 = \xi^{4-d} \int_0^{\xi\Lambda} \frac{d^d \vec{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\vec{q}^2 + 1)^2} \quad (8.36)$$

Per $t \rightarrow 0$ si ha $\xi \rightarrow \infty$. Dunque in questo limite

$$I_2 \approx \int_0^\infty \frac{dq}{q^{5-d}} \quad (8.37)$$

L'integrale è convergente per $d < 4$. Quindi

$$\lim_{T \rightarrow T_c} I_2 \approx \xi^{4-d} \quad (8.38)$$

Vediamo così che sotto la dimensione critica il comportamento del calore specifico viene cambiato dalla correzione all'approssimazione di Landau. Se invece siamo a $d > 4$, l'integrale è divergente, ma il prefattore ξ^{d-4} va a zero nello stesso limite. Conviene allora tornare all'espressione originale, dalla quale vediamo che il comportamento dell'integrale vicino a T_c è

$$I_2 \approx \int_0^\Lambda k^{d-5} dk \quad (8.39)$$

Adesso non si hanno divergenze ultraviolette, ed inoltre l'integrale converge anche nel limite infrarosso per $d > 4$. Pertanto in questo caso I_2 va ad un valore costante nel limite e non si hanno correzioni all'esponente critico. Riassumendo

$$\begin{aligned} \xi^{4-d} &\approx t^{-(2-d/2)}, & d < 4 \\ I_2 &\approx & (8.40) \\ &\text{costante,} & d > 4 \end{aligned}$$

Consideriamo adesso il primo integrale

$$I_1 = \int_0^\Lambda \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + \xi^{-2}} \quad (8.41)$$

Riscaldando la variabile di integrazione come nel caso precedente si ottiene

$$I_1 = \xi^{2-d} \int_0^{\xi\Lambda} \frac{d^d \vec{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 + 1} \quad (8.42)$$

quindi l'integrale è convergente per $d < 2$. In questo caso

$$I_1 \approx \xi^{2-d} \approx t^{-(1-d/2)}, \quad d < 2 \quad (8.43)$$

Se invece $d > 2$ si ritorna alla forma originaria che da il comportamento

$$I_1 \approx \int_0^\Lambda k^{d-3} dk \quad (8.44)$$

e questo integrale è finito per $d > 2$. In definitiva

$$\begin{aligned} \xi^{2-d} &\approx t^{-(1-d/2)}, & d < 2 \\ I_1 &\approx & (8.45) \\ &\text{costante,} & d > 2 \end{aligned}$$

Poiché per $d < 2$ I_1 ha una divergenza meno severa di I_2 , l'esponente critico è determinato da I_2 . Abbiamo così mostrato che l'approssimazione gaussiana produce il risultato

$$\alpha = 2 - \frac{d}{2}, \quad d < 4 \quad (8.46)$$

É anche possibile mostrare che nell'ambito dell'approssimazione gaussiana, ci sono delle correzioni negative alla temperatura critica, il che mostra, come aspettato, che la temperatura critica è più bassa di quella prevista dall'approssimazione di Landau.

Referenze

M. Le Bellac, Quantum and Statistical Field Theory, Oxford Science Publ.

IX. DIMENSIONI ANOMALE.

L'approssimazione gaussiana appare come un miglioramento della teoria di Landau e si potrebbe pensare di spingere più avanti l'espansione in modo sistematico. Questo è però uno sforzo vano in quanto i termini della serie che si ottengono in questo modo sono divergenti vicino alla temperatura critica e se anche così non si riuscirebbe a cambiare gli esponenti critici dai valori trovati nell'approssimazione di Landau. D'altra parte, sia sperimentalmente, che in alcuni modelli teorici risolubili, gli esponenti di Landau non appaiono essere corretti (vedi Fig. 9.1)). Inoltre esiste una dipendenza degli esponenti

Table 3.1 CRITICAL EXPONENTS FOR THE ISING UNIVERSALITY CLASS

Exponent	Mean Field	Experiment	Ising ($d = 2$)	Ising ($d = 3$)
α	0 (disc.)	0.110 - 0.116	0 (log)	0.110(5)
β	1/2	0.316 - 0.327	1/8	0.325±0.0015
γ	1	1.23 - 1.25	7/4	1.2405±0.0015
δ	3	4.6 - 4.9	15	4.82(4)
ν	1/2	0.625±0.010	1	0.630(2)
η	0	0.016 - 0.06	1/4	0.032±0.003

Fig. 9.1

dalla dimensionalità che non esiste nel caso di Landau. Ritorniamo allora alla funzione di partizione

$$Z = \int \mathcal{D}(\eta) e^{-\beta L} \quad (9.1)$$

con

$$L = \int d^d r \left[\frac{1}{2} \gamma (\vec{\nabla} \eta)^2 + a \eta^2 + \frac{1}{2} b \eta^4 - H \eta \right] \quad (9.2)$$

È utile riscaldare il campo η in modo tale che il coefficiente del termine di gradiente in βL sia uguale ad $1/2$. Poniamo

$$\phi = \sqrt{\beta\gamma}\eta \quad (9.3)$$

e

$$\frac{r_0}{2} = \frac{at}{\gamma}, \quad \frac{u_0}{4} = \frac{1}{2} \frac{b}{\beta\gamma^2} \quad (9.4)$$

Mettiamoci inoltre a campo esterno nullo, $H = 0$. Posto

$$H_{\text{eff}} = \beta L \quad (9.5)$$

si ha

$$H_{\text{eff}} = \int d^d \vec{r} \left[\frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} r_0 \phi^2 + \frac{u_0}{4} \phi^4 \right] \quad (9.6)$$

Possiamo calcolare le dimensioni delle varie quantità in unità di lunghezze (in alte energia si fa generalmente uso di unità di energia). Si ha

$$[\phi] = 1 - \frac{d}{2}, \quad [r_0] = -2, \quad [u_0] = d - 4 \quad (9.7)$$

Conviene allora introdurre una scala di lunghezze. Questa è offerta naturalmente da $1/\sqrt{r_0}$. Dato che r_0 si comporta come $T - T_c$ vicino al punto critico, vediamo che, almeno nell'approssimazione di Landau, si ha $r_0 \approx \xi^{-2}$. Quindi l'uso di $1/\sqrt{r_0}$ come unità di lunghezza è equivalente a misurare tutte le lunghezze in unità di lunghezze di correlazione $\xi(T)$. Posto allora

$$L = 1/\sqrt{r_0} \quad (9.8)$$

Definiamo quantità adimensionali

$$\Phi = \frac{\phi}{L^{1-d/2}}, \quad \vec{y} = \frac{\vec{r}}{L} \quad (9.9)$$

e

$$\bar{u}_0 = \frac{u_0}{L^{d-4}} \quad (9.10)$$

Segue

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}} &= \int d^d \vec{y} L^d \left[\frac{1}{2} L^{-2+2-d} (\vec{\nabla} \Phi)^2 + \frac{1}{2} L^{-2} L^{2-d} \Phi^2 + \frac{1}{4} \bar{u}_0 L^{d-4} L^{4-2d} \Phi^4 \right] = \\ &= \int d^d \vec{y} \left[\frac{1}{2} (\vec{\nabla} \Phi)^2 + \frac{1}{2} \Phi^2 + \frac{\bar{u}_0}{4} \Phi^4 \right] \end{aligned} \quad (9.11)$$

Dato che nell'approssimazione gaussiana si trascurano i termini quartici, l'idea è quella di fare una espansione perturbativa attorno alla parte quadratica di H_{eff} . Potremo allora scrivere

$$Z[\bar{u}_0] = \int \mathcal{D}(\Phi) e^{-(H_0(\Phi) + H_{\text{int}}(\Phi))} \quad (9.12)$$

con

$$H_0 = \int d^d y \left[\frac{1}{2} (\vec{\nabla} \Phi)^2 + \frac{1}{2} \Phi^2 \right] \quad (9.13)$$

e

$$H_{\text{int}} = \int d^d y \left[\frac{\bar{u}_0}{4} \Phi^4 \right] \quad (9.14)$$

Se $\bar{u}_0 \ll 1$ possiamo sviluppare in serie ottenendo

$$Z[\bar{u}_0] = \int \mathcal{D}(\Phi) e^{-H_0(\Phi)} \left[1 - H_{\text{int}} + \frac{1}{2} H_{\text{int}}^2 + \dots \right] \quad (9.15)$$

Il parametro di espansione è dato da

$$\bar{u}_0 = \frac{u_0}{L^{d-4}} = u_0 (r_0)^{(d-4)/2} = \frac{2b}{\beta\gamma^2} \left(\frac{2at}{\gamma} \right)^{(d-4)/2} = \frac{2b}{\beta\gamma^2} \left(\frac{2a}{\gamma} \right)^{(d-4)/2} t^{(d-4)/2} \quad (9.16)$$

In vicinanza del punto critico, $t \rightarrow 0$, se $d < 4$ si ha $\bar{u}_0 \rightarrow \infty$ e l'espansione perturbativa perde di senso. Viceversa per $d > 4$ la teoria di campo medio è sempre più accurata. Poichè l'espansione perde in genere senso quando $\bar{u}_0 \approx 1$, dobbiamo soddisfare la seguente disuguaglianza

$$\frac{2b}{\beta\gamma^2} \left(\frac{2a}{\gamma} \right)^{(d-4)/2} t^{(d-4)/2} \leq 1$$

Cioè

$$t^{(4-d)/2} \geq \frac{2b}{\beta\gamma^2} \left(\frac{2a}{\gamma} \right)^{(d-4)/2} = \frac{b}{2\beta a^2} \left(\frac{2a}{\gamma} \right)^{d/2} \quad (9.17)$$

Facendo uso della 6.14)

$$\xi(1) = \left(\frac{\gamma}{2a} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (9.18)$$

segue

$$t^{(4-d)/2} \geq \frac{b}{2\beta a^2} \frac{1}{\xi(1)^d} \quad (9.19)$$

e ritroviamo il criterio di Landau-Ginzburg.

Occorre osservare che il fatto che ogni termine di una serie diverga non significa che la serie sia divergente. Per esempio, la seguente serie

$$e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \quad (9.20)$$

ha limite zero per $t \rightarrow \infty$, mentre ogni termine della serie diverge nello stesso limite.

Possiamo ora mostrare, tramite l'analisi dimensionale, che è apparentemente impossibile che gli esponenti critici abbiano valori diversi da quelli predetti dall'analisi alla Landau. A titolo esemplificativo consideriamo la funzione di correlazione a due punti. Questa è data, in termini del campo ϕ da (trascurando la parte sconnessa)

$$G(\vec{r} - \vec{r}') = \langle \phi(\vec{r}) \phi(\vec{r}') \rangle = \frac{\int \mathcal{D}(\phi) e^{-H_{\text{eff}}} \phi(\vec{r}) \phi(\vec{r}')}{\int \mathcal{D}(\phi) e^{-H_{\text{eff}}}} \quad (9.21)$$

Notiamo che la $G(\vec{r})$ qui definita differisce di un fattore $\beta\gamma$ da quella definita in 6.8). Segue dalla 9.7)

$$[G(\vec{r})] = [\phi^2] = 2 - d \quad (9.22)$$

Per la trasformata di Fourier (vedi 6.15))

$$\hat{G}(\vec{k}) = \int d^d \vec{r} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} G(\vec{r}) \quad (9.23)$$

si ha allora

$$[\hat{G}(\vec{k})] = d + 2 - d = 2 \quad (9.24)$$

Osserviamo che una quantità fisica \mathcal{O}_P è definita implicitamente dall'equazione

$$\mathcal{O}_P = \mathcal{O}[\mathcal{O}] \quad (9.25)$$

dove \mathcal{O} è il valore numerico da associare ad \mathcal{O}_P quando si usino le unità di misura specificate da $[\mathcal{O}]$. Quindi se si cambiano le unità di misura, cambiano sia \mathcal{O} che $[\mathcal{O}]$, lasciando inalterata la quantità fisica \mathcal{O}_P . Se usiamo unità di lunghezza specificate da L , e cambiamo $L \rightarrow L' = \epsilon L$, la quantità $\hat{G}L^2$ deve rimanere invariante, cioè

$$\hat{G}'L'^2 = \hat{G}L^2 \quad (9.26)$$

Pertanto

$$\hat{G}'(\vec{k}') = \epsilon^{-2} \hat{G}(\vec{k}) \quad (9.27)$$

Sotto il cambiamento di unità di misura delle lunghezze il loro valore numerico scala in modo opposto, e segue dalla espressione della trasformata di Fourier che

$$\vec{k}' = \epsilon \vec{k} \quad (9.28)$$

Questo risultato dipende solo dalla definizione di $G(\vec{r})$ e quindi deve essere necessariamente vero. D'altra parte possiamo verificare questo risultato per l'approssimazione gaussiana in cui (vedi eq. 6.15))

$$\hat{G}(\vec{k}) = \frac{1}{\vec{k}^2 + r_0} \quad (9.29)$$

Si ha allora dalla 9.7) che sotto il cambiamento delle unità di misura

$$r_0 L^{-2} \rightarrow r_0 \epsilon^2 L'^{-2} \quad (9.30)$$

e quindi

$$\hat{G}'(\vec{k}') = \frac{1}{\epsilon^2 \vec{k}^2 + \epsilon^2 r_0} = \epsilon^{-2} \hat{G}(\vec{k}) \quad (9.31)$$

Si vede dunque che per $G(\vec{r})$ vale

$$G'(\vec{r}') = \epsilon^{d-2} G(\vec{r}) \quad (9.32)$$

Ma dalla 6.22) avevamo definito l'esponente critico per la funzione di correlazione, tramite l'equazione

$$G(\vec{r}, T_c) \approx r^{-(d-2+\eta)} \quad (9.33)$$

Questa relazione implica che variando le unità di lunghezza

$$G'(\vec{r}') = \epsilon^{d-2+\eta} G(\vec{r}) \quad (9.34)$$

Dunque si può avere accordo con l'analisi dimensionale se e solo se $\eta = 0$. A conclusione analoghe si arriva ragionando sull'esponente critico ν associato alla lunghezza di correlazione. Infatti si $[\xi] = 1$. Ma l'unica quantità dimensionata è il parametro r_0 con $[r_0] = -2$ e quindi segue necessariamente $\xi \approx 1/\sqrt{r_0}$ da cui

$$\xi \approx t^{-1/2} \quad (9.35)$$

da cui $\nu = 1/2$, il valore della teoria di Landau.

Evidentemente l'unica possibile spiegazione possibile è che esista un'altra grandezza con le dimensioni di una lunghezza, oltre alla lunghezza di correlazione. Naturalmente sembra a prima vista molto strano che in una descrizione del comportamento della teoria in vicinanza del punto critico, in cui la lunghezza di correlazione diviene infinita, ci possa essere una dipendenza da altre lunghezze finite, ma questa sembra una conclusione inevitabile se ci vogliamo riconciliare con i fatti sperimentali. D'altra parte la teoria che stiamo esaminando

è una teoria di campo e abbiamo visto che essa non è ben definita a meno che non si introduca uno schema di regolarizzazione e la procedura di rinormalizzazione. Nel caso da noi trattato della regolarizzazione dimensionale, questo modo di procedere introduce un parametro dimensionato, la massa μ , ma ogni altro schema di regolarizzazione porta in modo inevitabile all'introduzione di un'altra scala. Nel caso in esame abbiamo derivato la teoria di campo da un sistema che in genere è definito in principio su un reticolo di spacing a , abbiamo poi introdotto una procedura di coarse graining su una scala Λ^{-1} . Il parametro Λ serve come regolatore ultravioletto della teoria, e quindi esso, o lo spacing del reticolo, devono essere introdotti nell'analisi dimensionale. Per esempio, se la funzione di correlazione ha la forma

$$G(\vec{r}, T_c) \approx \Lambda^{-\eta} r^{-(d-2+\eta)} \quad (9.36)$$

Poiché sotto il cambiamento di unità di misura si ha

$$\Lambda \rightarrow \epsilon \Lambda \quad (9.37)$$

segue

$$G(\vec{r}, T_c) \rightarrow \epsilon^{-\eta} \epsilon^{d-2+\eta} G(\vec{r}, T_c) = \epsilon^{d-2} G(\vec{r}, T_c) \quad (9.38)$$

che soddisfa quindi la 9.32). Vediamo anche che la dimensione anomala può essere ottenuta sia studiando il comportamento della funzione di correlazione nel limite $r \rightarrow \infty$ (o $t \rightarrow 0$), che nel limite $\Lambda \rightarrow \infty$ a distanza fissa r . Infatti in questo limite si deve ottenere $G \approx \Lambda^{-\eta}$. Poiché $G \approx \phi^2$, il risultato si può interpretare dicendo che ϕ ha acquistato una dimensione anomala in lunghezza pari a $\eta/2$. Questo è infatti il risultato della teoria dei campi, in cui le dimensioni anomale sono collegate ad una rinormalizzazione dei campi.

Si può fare un simile ragionamento anche per la lunghezza di correlazione. In questo caso le quantità che entrano in gioco con le loro relative dimensioni, sono

$$[\xi] = 1, \quad [\Lambda] = -1, \quad [r_0] = -2 \quad (9.39)$$

Quindi potremo scrivere

$$\xi = r_0^{-1/2} f\left[\frac{r_0}{\Lambda^2}\right] \quad (9.40)$$

dove $f(x)$ è una funzione da determinarsi. Se accade che al punto critico

$$f(x) \approx x^\theta \quad (9.41)$$

allora (ricordando che $r_0 \approx t$)

$$\xi \approx t^{-1/2} t^\theta \Lambda^{-2\theta} \quad (9.42)$$

e quindi

$$\nu = \frac{1}{2} - \theta \quad (9.43)$$

Occorre ancora rimarcare il fatto che l'esistenza di dimensioni anomale è in qualche modo in contrasto con la nostra intuizione fisica che ci direbbe che allorché la lunghezza di correlazione diviene molto grande, le quantità correlate con i dettagli microscopici della teoria dovrebbe essere ignorabili. Ma il fatto che l'analisi di questi fenomeni sia riconducibile ad una teoria di campo è il cuore del problema. Infatti questa teoria è definibile solo tramite il processo di rinormalizzazione e questa introduce una nuova scala nel problema.

X. ESPONENTI CRITICI E LEGGI DI SCALA.

Ricordiamo qui la definizione dei vari esponenti critici.

		Valore classico
Calore specifico	$c \approx t ^{-\alpha}$	$\alpha = 0$, Landau $\alpha = 2 - d/2$, Gauss. appr.
Parametro d'ordine	$\eta \approx t ^\beta$	$\beta = \frac{1}{2}$
Suscettività'	$\chi \approx t ^{-\gamma}$	$\gamma = 1$
Equaz. di stato (isoterma crit., $t = 0$)	$\eta \approx H^{1/\delta}$	$\delta = 3$
Lunghezza di correlazione	$\xi \approx t ^{-\nu}$	$\nu = \frac{1}{2}$
Funzione di correlazione	$G \approx r^{-(d-2+\eta)}$	$\eta = 0$

(10.1)

Non abbiamo evidenziato in questa tavola la possibile differenza tra gli esponenti critici sopra e sotto la temperatura di transizione. Infatti essi risultano uguali, salvo ovviamente il caso del parametro d'ordine che è zero sopra la transizione. Una questione molto interessante è

chiaramente se esistono delle relazioni tra i vari esponenti. Queste furono infatti scoperte a partire dal 1963 in poi. Per esempio, da stime approssimate degli esponenti fu assunta la validità della relazione (J.W. Essam and M.E. Fisher, J, Chem. Phys. **38**, 802, 1961)

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \quad (10.2)$$

e successivamente dimostrata la validità termodinamica della relazione

$$\alpha + 2\beta + \gamma \geq 2 \quad (10.3)$$

da Rushbrooke (J. Chem. Phys. **39**, 842, 1963). Altre disuguaglianze sono state dimostrate rigorosamente, ma si è visto che in genere esse valgono come uguaglianze. L'insieme delle relazioni che furono trovate è il seguente

$$\text{Fisher} \quad \gamma = \nu(2 - \eta)$$

$$\text{Rushbrooke} \quad \alpha + 2\beta + \gamma = 2 \quad (10.4)$$

$$\text{Widom} \quad \gamma = \beta(\delta - 1)$$

$$\text{Josephson} \quad \nu d = 2 - \alpha$$

Tutte queste relazioni sono ben soddisfatte sperimentalmente. Per qualche tempo si è ritenuto che l'ultima relazione (detta di iperscaling perché coinvolge il numero di dimensioni) non fosse valida. Successivamente anch'essa è stata confermata, salvo i casi in cui si abbia una interazione microscopica a lungo range. Infine Widom (J. Chem. Phys. **43**, 3898, 1963) ha dato una giustificazione di tutte queste relazioni tramite l'ipotesi di scaling. Questa ipotesi cerca di conciliare i due risultati di eq. 10.1) circa il parametro d'ordine. Widom notò infatti che le due leggi di scaling seguono se si suppone

$$\eta(t, h) = |t|^\beta F_\pm \left(\frac{h}{|t|^\Delta} \right), \quad t > 0, \text{ or } t < 0 \quad (10.5)$$

dove si è introdotto

$$h = \beta H \quad (10.6)$$

dato che il campo esterno effettivo è proprio h . L'ipotesi di scaling di Widom è supposta avere validità per $|t|$, $h \ll 1$, ma con rapporto arbitrario $h/|t|$. F_\pm sono dette funzioni

di scaling, mentre Δ è noto come esponente di gap. Questa ipotesi è ben confermata dai dati sperimentali (vedi Fig. 10.1), che mostrano come la funzione $\eta(t, h)$ divisa per $|t|^\beta$ sia funzione di una singola variabile $h/|t|^\Delta$. Data la precedente relazione possiamo ritrovare le

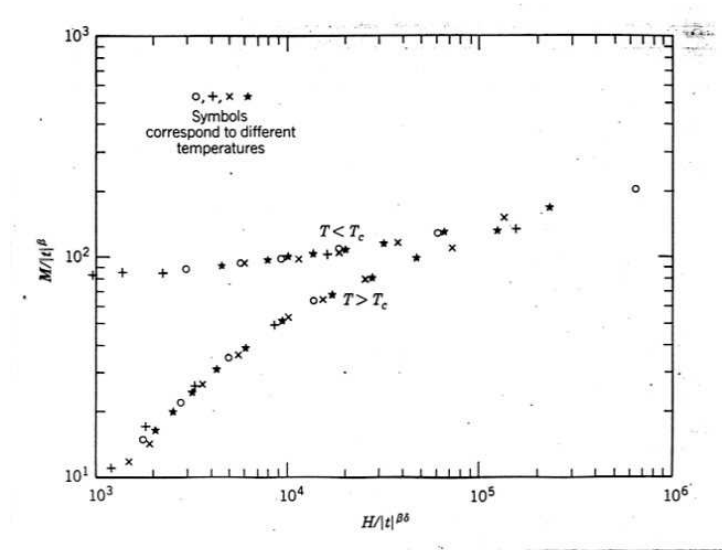


Fig. 10.1

leggi di scaling e relazioni tra gli esponenti critici. Per esempio, nel limite $h \rightarrow 0$ si ha

$$\eta(t, 0) = |t|^\beta F_\pm(0) \quad (10.7)$$

Dato che

$$\begin{aligned} \eta(t) &\rightarrow |t|^\beta, & t < 0 \\ \eta(t) &\rightarrow 0, & t > 0 \end{aligned} \quad (10.8)$$

segue

$$F_+(0) = 0, \quad F_-(0) \neq 0 \quad (10.9)$$

Consideriamo poi la suscettività

$$\chi_T = \left. \frac{\partial \eta}{\partial H} \right|_{H=0} = \beta \left. \frac{\partial \eta}{\partial h} \right|_{h=0} \quad (10.10)$$

Segue allora dalla 10.5)

$$\chi_T = |t|^\beta F'_\pm(0) \frac{\beta}{|t|^\Delta} = |t|^{\beta-\Delta} F'_\pm(0) \beta \quad (10.11)$$

Pertanto

$$\Delta = \beta + \gamma \quad (10.12)$$

Consideriamo poi l'andamento per $h \rightarrow 0$ lungo l'isoterma critica. A questo scopo supponiamo che

$$F_{\pm}(x) \sim x^{\lambda}, \quad \text{per } x \rightarrow \infty \quad (10.13)$$

Segue, per $t \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$

$$\eta(t, h) \rightarrow |t|^{\beta} \left(\frac{h}{|t|^{\Delta}} \right)^{\lambda} \sim |t|^{\beta - \lambda \Delta} h^{\lambda} \quad (10.14)$$

E dato che a $t = 0$, con $h \neq 0$ questa espressione non deve né divergere né annullarsi, segue

$$\lambda = \frac{\beta}{\Delta} \quad (10.15)$$

e quindi dalla 10.1),

$$\Delta = \beta \delta \quad (10.16)$$

Usando la 10.12) si trova la relazione di Widom 10.4)

$$\beta \delta = \beta + \gamma \quad (10.17)$$

L'ipotesi di scaling può essere formulata anche per altre quantità fisiche quali ad esempio l'energia libera per unità di volume, o per essere più esatti, per la sua parte singolare, f_s . In questo caso l'ipotesi di scaling è

$$f_s(t, h) = t^{2-\alpha} F_f \left(\frac{h}{t^{\Delta}} \right) \quad (10.18)$$

Il parametro d'ordine si ottiene differenziando rispetto al campo esterno

$$\eta = -\beta \frac{\partial f_s}{\partial h} = -\beta t^{2-\alpha-\Delta} F'_f \left(\frac{h}{t^{\Delta}} \right) \quad (10.19)$$

e confrontando con la 10.5)

$$\beta = 2 - \alpha - \Delta \quad (10.20)$$

ricordando la 10.12), $\Delta = \beta + \gamma$, si trova la relazione di Rushbrooke

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \quad (10.21)$$

Più in generale le relazioni di scaling si possono derivare nell'ipotesi in cui, date le dimensioni $D = [Q]$ di una quantità fisica Q , il comportamento di Q in vicinanza al punto critico sia completamente dettato dalla lunghezza di correlazione, tramite la relazione

$$Q \sim \xi^D, \quad t \rightarrow 0 \quad (10.22)$$

da cui, assumendo

$$\xi \sim |t|^{-\nu}, \quad t \rightarrow 0 \quad (10.23)$$

segue

$$Q \rightarrow |t|^{-\nu D}, \quad t \rightarrow 0 \quad (10.24)$$

Questa ipotesi è fisicamente ragionevole, in quanto equivale a dire che in vicinanza del punto critico, dato che la lunghezza di correlazione diverge, si possono ignorare tutte le altre scale. D'altra parte abbiamo già osservato che le dimensioni di scala delle osservabili possono essere diverse da quelle canoniche, se l'osservabile acquista una dimensione anomala tramite una dipendenza non banale da una scala microscopica quale il cutoff ultravioletto Λ . Dunque, nell'ipotesi detta, le relazioni di scaling non dipenderanno dal solo esponente ν , ma anche dalle dimensioni anomale che le osservabili possono possedere. Nel tipo di teoria che abbiamo fin qui considerato si avranno allora due esponenti indipendenti, ν e la dimensione anomala η del parametro d'ordine. Per effettuare questo tipo di analisi iniziamo dalla parte singolare dell'energia libera per unità di volume. Dato che βF è adimensionale, segue

$$[\beta f_s] = -d \quad (10.25)$$

Potremo allora scrivere

$$\beta f_s \sim \xi^{-d} \left[A + B \left(\frac{\ell_1}{\xi} \right)^{\sigma_1} + C \left(\frac{\ell_2}{\xi} \right)^{\sigma_2} + \dots \right] \quad (10.26)$$

dove ℓ_1, ℓ_2 sono possibili scale microscopiche. Il comportamento leading per $t \rightarrow 0$ ($\xi \rightarrow \infty$) è allora

$$\beta f_s \sim \xi^{-d} \sim |t|^{\nu d} \quad (10.27)$$

Dunque per il calore specifico si ha

$$c \sim -T \frac{\partial^2 f_s}{\partial T^2} \sim |t|^{\nu d - 2} \quad (10.28)$$

segue dalla 10.1)

$$\alpha = 2 - \nu d \quad (10.29)$$

cioè la legge di iperscaling di Josephson. Le altre relazioni si trovano ricordando che $G \sim \eta^2$ e quindi le dimensioni di scaling di η saranno

$$[\eta]_{\text{scaling}} = \frac{1}{2}(2 - d - \eta) \quad (10.30)$$

dove η è la dimensione anomala. Ma la dimensione canonica di η è $(2 - d)/2$ e quindi

$$\eta \sim \Lambda^{-\eta/2} \xi^{(2-d-\eta)/2} \left[1 + A' \left(\frac{\ell_1}{\xi} \right)^{\sigma_1} + \dots \right] \quad (10.31)$$

Dunque per $t \rightarrow 0$

$$\eta \sim |t|^{-\nu(2-d-\eta)/2} \quad (10.32)$$

da cui

$$\beta = -\frac{\nu}{2}(2 - d - \eta) \quad (10.33)$$

Si ha poi dalla 6.25)

$$\chi_T = \beta \hat{G}(0) \quad (10.34)$$

e dato che

$$\hat{G}(k) \sim \int d^d \vec{r} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} G(\vec{r}) \quad (10.35)$$

vediamo che le dimensioni di scaling di \hat{G} sono $d + 2 - d - \eta = 2 - \eta$ e quindi

$$\frac{\chi_T}{\beta} \sim \Lambda^{-\eta} \xi^{2-\eta} \sim |t|^{-\nu(2-\eta)} \quad (10.36)$$

da cui

$$\gamma = \nu(2 - \eta) \quad (10.37)$$

che è la relazione di Fisher. Si ha infine

$$\eta = -\frac{\partial f_s}{\partial H} \quad (10.38)$$

e quindi le dimensioni di scaling di H sono quelle di f_s meno quelle di η , cioè $-d - (2 - d - \eta)/2$, cioè $-(2 + d - \eta)/2$, e quindi (H eredita la dimensione anomala da η)

$$H \sim \Lambda^{\eta/2} \xi^{-(2+d-\eta)/2} \quad (10.39)$$

da cui

$$H \sim |t|^{\nu(2+d-\eta)/2} \quad (10.40)$$

che confrontata con la 10.1)

$$\eta \sim H^{1/\delta} \quad (10.41)$$

da

$$\beta = \frac{\nu}{2\delta}(2 + d - \eta) \quad (10.42)$$

Riassumendo, abbiamo trovato le seguenti quattro relazioni

$$\begin{aligned} 2 - \alpha &= \nu d \\ \beta &= -\frac{\nu}{2}(2 - d - \eta) \\ \gamma &= \nu(2 - \eta) \\ \beta\delta &= \frac{\nu}{2}(2 + d - \eta) \end{aligned} \quad (10.43)$$

Non è difficile vedere che prendendo opportune combinazioni lineari si riottengono tutte le relazioni 10.4).

XI. GRUPPO DI RINORMALIZZAZIONE ALLA WILSON I (APPROCCIO DI KADANOFF).

Riassumendo ciò che abbiamo visto sin qui, possiamo dire che la teoria di campo medio non riproduce in modo corretto gli esponenti critici e che inoltre i tentativi per migliorarla tramite un'espansione perturbativa sono fallimentari a causa della presenza di divergenze nel limite $t \rightarrow 0$. È da notare che questo tipo di divergenze corrispondono a divergenze infrarosse nel linguaggio della teoria dei campi, dato che il limite precedente corrisponde al limite di massa nulla. Abbiamo anche visto che queste difficoltà possono essere aggirate tramite le ipotesi di scaling, sebbene non si sia data nessuna giustificazione teorica per queste ipotesi. Vedremo ora che queste ipotesi seguono in sostanza dall'esistenza della lunghezza di correlazione che diverge alla temperatura critica. L'argomento fondamentale segue dal lavoro di Kadanoff (Physics **2**, 263, 1966) che anche se non corretto nei dettagli, è però corretto nello spirito. Infatti le argomentazioni di Kadanoff furono poi riprese e completate da Wilson (Phys. Rev. **B 4**, 3174, 3184, 1971; K. G. Wilson and J. Kogut, Phys. Rep. **C 12**, 75 1974), che ha anche mostrato come fosse possibile calcolare in maniera approssimata gli esponenti critici.

Iniziamo ad illustrare il lavoro di Kadanoff nell'ambito del modello di Ising in d dimensioni. Questo modello è definito su un reticolo ipercubico di spacing a , e consiste di un sistema

Ω di spin S_i che assumono i due valori

$$S_i = \pm 1 \quad (11.1)$$

L'hamiltoniana descrive un accoppiamento tra primi vicini ed è data da

$$H_\Omega = -J \sum_{\langle ij \rangle=1}^N S_i S_j - H \sum_i S_i \quad (11.2)$$

Al solito H descrive un campo magnetico esterno, e la notazione $\langle ij \rangle$ indica che i siti descritti da i e j sono primi vicini. Useremo anche la notazione abbreviata

$$\beta H_\Omega = -K \sum_{\langle ij \rangle=1}^N S_i S_j - h \sum_i S_i \quad (11.3)$$

$$K = \beta J, \quad h = \beta H \quad (11.4)$$

Gli spin sono correlati su distanza dell'ordine della lunghezza di correlazione $\xi(T)$, dunque se si considerano spin su una scala di lunghezze ℓa ($\ell > 1$), questi agiranno come un singolo spin fintanto che

$$a \ll \ell a \ll \xi(T) \quad (11.5)$$

Possiamo allora pensare, con procedura analoga a quella seguita per effettuare il coarse graining, di sostituire gli spin all'interno di un blocco (blocco di spin) con un singolo spin effettivo. Un tale blocco conterrà ℓ^d spin e quindi passeremo da un sistema con N spin ad uno con N/ℓ^d blocchi di spin. Lo spin di blocco sarà definito in modo da conservare la proprietà 11.1), cioè

$$S_I = \frac{1}{|\bar{m}_\ell|} \frac{1}{\ell^d} \sum_{i \in I} S_i \quad (11.6)$$

dove si è introdotto la magnetizzazione media su un blocco

$$\bar{m}_\ell = \frac{1}{\ell^d} \sum_{i \in I} \langle S_i \rangle \quad (11.7)$$

e abbiamo assunto che la procedura scelta non porti mai ad un valore nullo. In questo modo il valor medio degli spin di blocco è lo stesso degli spin originali

$$\langle S_I \rangle = \pm 1 \quad (11.8)$$

Il lavoro di Kadanoff consiste nella formulazione di due ipotesi, la prima essendo:

IPOTESI 1:

dato che gli spin originali interagiscono solo con i primi vicini ed il campo esterno, assumiamo che anche gli spin di blocco conservino le stesse caratteristiche, cioè che interagiscano solo con gli spin di blocco primi vicini e con un campo esterno effettivo.

Ovviamente avremo adesso sia un nuovo accoppiamento K_ℓ tra primi vicini, che un nuovo campo h_ℓ . Questi dipendono da ℓ in quanto dipendono dal modo in cui è definito il blocco di spin. Inoltre questi accoppiamenti effettivi soddisferanno la condizione al contorno

$$K_1 = K, \quad h_1 = h \quad (11.9)$$

Dunque sulla base di questa assunzione l'hamiltoniana di blocco sarà

$$-\beta H_\ell = K_\ell \sum_{\langle IJ \rangle}^{N\ell^{-d}} S_I S_J + h_\ell \sum_I^{N\ell^{-d}} S_I \quad (11.10)$$

Il sistema descritto da H_ℓ è identico a quello descritto da H_Ω salvo il fatto che lo spacing reticolare è ora pari a ℓa , mentre lo spacing iniziale era pari ad a . Segue che la lunghezza di correlazione in unità di spacing reticolare del nuovo sistema (ℓa) è più piccola della lunghezza di correlazione misurata in unità dello spacing iniziale a . In formule

$$\xi = \xi_\ell(\ell a) = \xi_1 a \quad (11.11)$$

Dunque

$$\xi_\ell = \frac{\xi_1}{\ell} \quad (11.12)$$

Vediamo che $\xi_\ell < \xi_1$ e quindi il nuovo sistema è più lontano dalla criticalità del sistema originario. Dunque il nuovo sistema avrà anche una nuova temperatura critica t_ℓ . Anche il campo magnetico è riscaldato. Infatti si ha, usando la 11.6)

$$h \sum_i S_i = h \sum_I \sum_{i \in I} S_i = h \sum_I |\bar{m}_\ell| \ell^d S_I = h_\ell \sum_I S_I \quad (11.13)$$

e quindi

$$h_\ell = h |\bar{m}_\ell| \ell^d \quad (11.14)$$

In questo modo l'energia libera del nuovo sistema è formalmente identica a quella del sistema originale, ma con nuova temperatura critica t_ℓ e nuovo campo esterno h_ℓ . Inoltre il numero

di gradi di libertà nei due sistemi è diverso. Dunque le energie libere espresse in termini delle energie libere per spin o per blocco di spin sono

$$N\ell^{-d}f_s(t_\ell, h_\ell) = Nf_s(t, h) \quad (11.15)$$

da cui

$$f_s(t_\ell, h_\ell) = \ell^d f_s(t, h) \quad (11.16)$$

È a questo punto che interviene la seconda ipotesi di Kadanoff:

IPOTESI 2:

assumiamo che l'andamento di t_ℓ e h_ℓ con ℓ sia

$$t_\ell = t\ell^{y_t}, \quad h_\ell = h\ell^{y_h}. \quad y_t > 0, \quad y_h > 0 \quad (11.17)$$

L'assunzione sulla positività degli esponenti segue da un lato, perché il nuovo sistema è più lontano dalla criticalità, dall'altro perché h è riscaldato di un fattore ℓ^d (a parte la magnetizzazione media che è di ordine 1). Si ottiene allora dalla 11.16)

$$f_s(t, h) = \ell^{-d} f_s(t\ell^{y_t}, h\ell^{y_h}) \quad (11.18)$$

Fino a questo momento non abbiamo specificato ℓ . Possiamo fare la seguente scelta

$$\ell = |t|^{-1/y_t} \quad (11.19)$$

o $\ell^{y_t}|t| = 1$. Con questa scelta troviamo la legge di scaling

$$f_s(t, h) = |t|^{d/y_t} f_s(1, h|t|^{-y_h/y_t}) \quad (11.20)$$

Definendo infine

$$\Delta = \frac{y_h}{y_t}, \quad 2 - \alpha = \frac{d}{y_t} \quad (11.21)$$

si ha

$$f_s(t, h) = |t|^{2-\alpha} F_f \left(\frac{h}{|t|^\Delta} \right) \quad (11.22)$$

con

$$F_f(x) = f_s(1, x) \quad (11.23)$$

Abbiamo dunque ritrovato l'ipotesi di scaling (10.18). Una analoga discussione potrebbe essere fatta per la funzione di correlazione.

Vediamo che le ipotesi di Kadanoff giustificano le ipotesi di scaling ma in un modo che non ci permette di calcolare né gli esponenti critici né le funzioni di scaling. Inoltre l'assunzione che l'hamiltoniana di blocco sia della stessa forma dell'hamiltoniana originale, non solo non è giustificata ma non sembra nemmeno essere corretta. L'importanza concettuale dell'argomento di Kadanoff è però che rappresenta un approccio molto diverso da quello della meccanica statistica tradizionale. Infatti esso cerca di affrontare il problema partendo da un sottoinsieme di tutti i gradi di libertà. Quello che è generalizzabile dell'approccio di Kadanoff è giusto il fatto che gli accoppiamenti t e h variano cambiando la scala delle lunghezze. Il lavoro di Wilson consiste appunto nel vedere che cosa fanno questi accoppiamenti nella eliminazione ripetuta dei gradi di libertà.

XII. IL GRUPPO DI RINORMALIZZAZIONE NEI FENOMENI CRITICI.

L'idea del gruppo di rinormalizzazione nei fenomeni critici consiste di due passi principali. Prima di tutto si costruisce una trasformazione in blocchi di spin analoga al caso di Kadanoff. Il secondo passo consiste nell'identificare l'origine del comportamento singolare. Le idee sono molto analoghe al caso precedente:

- i) si effettua una trasformazione a blocchi di spin separati da una distanza ℓa
- ii) si riscaldano le lunghezze in modo che nelle nuove unità i blocchi di spin siano separati dalla stessa distanza a degli spin originari. In termini di gradi di libertà i due sistemi così ottenuti sono identici, ma in generale hanno una diversa hamiltoniana
- iii) si itera la procedura ottenendo una nuova hamiltoniana ad ogni passo. Ognuna di queste hamiltoniane descrive un sistema statistico sempre più lontano dalla criticalità. Ogni trasformazione che si effettua è analitica, gli effetti non analitici intervengono dopo infinite trasformazioni durante le quali si integrano successivamente tutti i gradi di libertà.

Il tipico sistema che considereremo sarà caratterizzato dalla hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \beta H_{\Omega} = \sum_n K_n \Theta_n[S] \quad (12.1)$$

dove le K_n sono gli accoppiamenti che caratterizzano il sistema e Θ_n sono degli operatori locali che dipendono dai gradi di libertà del sistema, indicati genericamente con S .

Studieremo come \mathcal{H} si trasforma man mano che sommiamo sui gradi di libertà a breve distanza (ordine a), o sulle corte lunghezze d'onda. Concettualmente questo si effettua co-

me detto precedentemente, cioè raggruppando i gradi di libertà all'interno di un blocco di dimensioni ℓa . Questa trasformazione viene detta trasformazione del gruppo di rinormalizzazione ed indicata con R_ℓ . Se consideriamo l'insieme di tutti gli accoppiamenti compatibili con le simmetrie del problema, la trasformazione precedente può essere considerata come una trasformazione nello spazio delle costanti di accoppiamento $[K]$

$$[K'] = R_\ell[K] \quad (12.2)$$

In genere R_ℓ è una trasformazione non-lineare, inoltre, poiché noi assumiamo $\ell > 1$, la trasformazione non ammette inverso. Dato che sono soddisfatte le proprietà di moltiplicazione

$$[K'] = R_{\ell_2}[K], \quad [K''] = R_{\ell_1}[K'] = R_{\ell_1}R_{\ell_2}[K] \quad (12.3)$$

da cui

$$R_{\ell_1\ell_2}[K] = R_{\ell_1}R_{\ell_2}[K] \quad (12.4)$$

segue che le R_ℓ formano un semigruppato. Inoltre, visto che empiricamente il risultato di Kadanoff è corretto, possiamo supporre che diverse hamiltoniane di partenza possano portare ad hamiltoniane di blocco molto simili. Questo spiegherebbe il carattere di universalità dei fenomeni critici, cioè che sistemi molto diversi abbiano lo stesso comportamento nell'intorno dei propri punti critici.

Vediamo adesso come si costruiscono le trasformazioni del gruppo di rinormalizzazione. Ci sono ovviamente molti modi per effettuarle, ma tutte coinvolgono l'integrazione (o coarse-graining) di un certo numero di gradi di libertà. Qui saremo interessati alla procedura generica piuttosto che al modo effettivo in cui si effettua la rinormalizzazione. La funzione di partizione risulta

$$Z_N[K] = Tr[e^{\mathcal{H}}] \quad (12.5)$$

e quindi l'energia libera per grado di libertà risulta

$$g[K] = \frac{1}{N} \log Z_N[K] \quad (12.6)$$

La trasformazione R_ℓ riduce il numero di gradi di libertà da N a $N' = N/\ell^d$. I nuovi gradi di libertà sono le variabili di blocco $\{S'_I\}$ con $I = 1, \dots, N'$, ed il nuovo sistema sarà descritto da una hamiltoniana effettiva $\mathcal{H}'_{N'}$, ottenuta facendo una traccia parziale sui gradi di libertà

S_i corrispondenti ad una data configurazione di blocco $\{S'_I\}$. In altri termini, le variabili di blocco saranno funzioni delle variabili originali all'interno del blocco

$$S'_I = f(S_i), \quad i \in I \quad (12.7)$$

Allora la traccia parziale risulta così definita

$$e^{\mathcal{H}'_{N'}([K'], S'_I)} = \text{Tr}' e^{\mathcal{H}_N([K], S_i)} = \text{Tr} \delta(S'_I - f(S_i)|_{i \in I}) e^{\mathcal{H}_N([K], S_i)} \quad (12.8)$$

dove

$$\text{Tr} \delta(S'_I - f(S_i)|_{i \in I}) e^{\mathcal{H}_N([K], S_i)} = \sum_{S_i} \prod_I \delta(S'_I - f(S_i)|_{i \in I}) e^{\mathcal{H}_N([K], S_i)} \quad (12.9)$$

Dato che la funzione δ soddisfa

$$\sum_{S'_I} \delta(S'_I - f(S_i)|_{i \in I}) = 1 \quad (12.10)$$

segue immediatamente

$$Z_{N'}[K'] = \sum_{S'_I} e^{\mathcal{H}'_{N'}([K'], S'_I)} = \sum_{S_i} e^{\mathcal{H}_N([K], S_i)} = Z_N[K] \quad (12.11)$$

Dunque la funzione di partizione del sistema trasformato è identica a quella del sistema iniziale. Più generalmente si può definire la traccia parziale e quindi l'hamiltoniana effettiva partendo da un operatore di proiezione $P(S_i, S'_I)$ che soddisfa le seguenti tre proprietà

- (i) $P(S_i, S'_I) \geq 0$
- (ii) $P(S_i, S'_I)$ deve riflettere le simmetrie del problema
- (iii) $\sum_{S'_I} P(S_i, S'_I) = 1$

La prima proprietà assicura che $e^{\mathcal{H}'_{N'}([K'], S'_I)}$ sia definito positivo, in modo da poter definire una hamiltoniana effettiva. La seconda condizione assicura che l'hamiltoniana effettiva abbia le stesse simmetrie del problema iniziale. Infine abbiamo già visto che la terza condizione assicura che le funzioni di partizione del sistema originale e del sistema trasformato siano le stesse. Segue allora immediatamente che le energie libere per grado di libertà nei due sistemi soddisfano

$$g[K] = \frac{1}{N} \log Z_N[K] = \frac{\ell^d}{\ell^d N} \log Z_{N'}[K'] = \frac{1}{\ell^d N'} \log Z_{N'}[K'] = \ell^{-d} g[K'] \quad (12.12)$$

La procedura che abbiamo qui indicato è evidentemente nello stesso spirito di Kadanoff, ma senza nessuna ipotesi sulla hamiltoniana effettiva, la quale in generale conterrà operatori

diversi da quelli iniziali. Da questo punto di vista il formalismo non sembrerebbe essere di particolare utilità. Il solo vantaggio è che i $[K']$ sono funzioni analitiche dei $[K]$ dato che si passa dagli uni agli altri eliminando solo un numero finito di gradi di libertà. Di conseguenza risulta di gran lunga più semplice approssimare gli accoppiamenti che non la funzione di partizione. Inoltre si può vedere che in genere solo alcuni degli accoppiamenti sono importanti. Questo punto può essere ben esemplificato considerando la descrizione coarse grained. I campi possono essere definiti tramite un cut-off sui modi di Fourier

$$\phi_\Lambda(\vec{r}) = \int_0^\Lambda d^d\vec{k} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{\phi}(\vec{k}) \quad (12.13)$$

dove il cut-off Λ corrisponde appunto ad un coarse-graining su scale $a_\Lambda = 1/\Lambda$. Supponiamo adesso di eseguire una trasformazione del gruppo di rinormalizzazione. A questo scopo separiamo il campo $\phi_\Lambda(\vec{r})$ in due parti, una ϕ_H corrispondente alle corte distanze ($a_\Lambda, \ell a_\Lambda$), l'altra ϕ_ℓ sull'intervallo rimanente

$$\phi_\Lambda(\vec{r}) = \phi_\ell(\vec{r}) + \phi_H(\vec{r}) \quad (12.14)$$

con

$$\phi_H(\vec{r}) = \int_{\Lambda/\ell}^\Lambda d^d\vec{k} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{\phi}(k) \quad (12.15)$$

$$\phi_\ell(\vec{r}) = \int_0^{\Lambda/\ell} d^d\vec{k} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{\phi}(k) \quad (12.16)$$

Dopo aver integrato funzionalmente su ϕ_H rimarremo con un sistema definito dal campo ϕ_ℓ che è definito come il campo originale, ma con un coarse-graining sulla scala $\ell a_\Lambda = \ell/\Lambda$ invece che sulla scala $a_\Lambda = 1/\Lambda$. L'hamiltoniana effettiva si otterrà da

$$e^{\mathcal{H}_\ell[\phi_\ell]} = \int \mathcal{D}(\phi_H) e^{\mathcal{H}[\phi_H + \phi_\ell]} \quad (12.17)$$

Per comprendere l'utilità del formalismo si può notare che è intrinseco in questa formulazione che sia \mathcal{H} che \mathcal{H}_ℓ siano sviluppabili in una serie di operatori locali nei campi ϕ_Λ e ϕ_ℓ rispettivamente. Per esempio,

$$\mathcal{H}_\ell[\phi_\ell] = \sum_n K_n^\ell \int d^d\vec{r} O_n[\phi_\ell] \quad (12.18)$$

ed analoga espressione per \mathcal{H} . In genere gli operatori O_n hanno una espressione rappresentabile simbolicamente come

$$O_n \sim \partial^p \phi^q \quad (12.19)$$

con ogni O_n che ha una dimensione canonica in unità di lunghezza

$$[O_n] = -d_n \quad (12.20)$$

Nel caso della 12.19)

$$d_n = p + q\left(\frac{d}{2} - 1\right) \quad (12.21)$$

Dato che l'hamiltoniana è adimensionale segue

$$[K_n^\ell] = d_n - d \quad (12.22)$$

Definiamo allora degli accoppiamenti adimensionali

$$K_n^\ell = \bar{K}_n^\ell (\ell a_\Lambda)^{d_n - d} \quad (12.23)$$

da cui

$$\mathcal{H}_\ell[\phi_\ell] = \sum_n \bar{K}_n^\ell (\ell a_\Lambda)^{d_n - d} \int d^d \vec{r} O_n(\phi_\ell) \quad (12.24)$$

Il valore dell'integrale sarà fissato essenzialmente dalla lunghezza di correlazione e segue dunque per motivi dimensionali

$$\int d^d \vec{r} O_n(\phi_\ell) \sim \xi_\ell^{d - d_n} \quad (12.25)$$

Pertanto

$$\mathcal{H}_\ell[\phi_\ell] \sim \sum_n \bar{K}_n^\ell \left(\frac{\ell a_\Lambda}{\xi_\ell}\right)^{d_n - d} \quad (12.26)$$

dato che siamo interessati al regime critico, $\xi_\ell \rightarrow \infty$, vediamo che i termini che contribuiscono ad \mathcal{H}_ℓ sono solo quelli per cui $d_n \leq d$. Infatti

$$\lim_{\xi_\ell \rightarrow \infty} \left(\frac{\ell a_\Lambda}{\xi_\ell}\right)^{d_n - d} = 0, \quad \text{per } d_n > d \quad (12.27)$$

Ma in generale esiste solo un numero limitato di operatori locali con $d_n \leq d$ e questo ci permette dunque di studiare l'evoluzione con il gruppo di rinormalizzazione di un insieme ristretto di costanti di accoppiamento. Consideriamo, per esempio, un campo scalare in $d = 3$. Poiché $[\phi] = -1/2$, si vede facilmente che imponendo l'invarianza per rotazioni ed a meno di derivate totali (gli effetti di superficie sono trascurabili nel limite termodinamico), gli unici operatori possibili con $d_n \leq 3$ sono ϕ^n con $n = 1, \dots, 6$ e $(\vec{\nabla}\phi)^2$. Gli operatori locali O_n sono classificati in tre tipi a seconda del valore di d_n :

$$\begin{aligned} d_n > d & \text{ operatore irrilevante} \\ d_n = d & \text{ operatore marginale} \\ d_n < d & \text{ operatore rilevante} \end{aligned}$$

In pratica, il gruppo di rinormalizzazione viene studiato nello spazio degli accoppiamenti, e si vede allora (12.23) che gli accoppiamenti adimensionali, \bar{K}_n^ℓ scalano con ℓ come ℓ^{d-d_n} e quindi per $\ell \rightarrow \infty$ i \bar{K}_n^ℓ con $d_n > d$ vanno a zero, permettendoci di confinare il nostro studio all'evoluzione di pochi accoppiamenti.

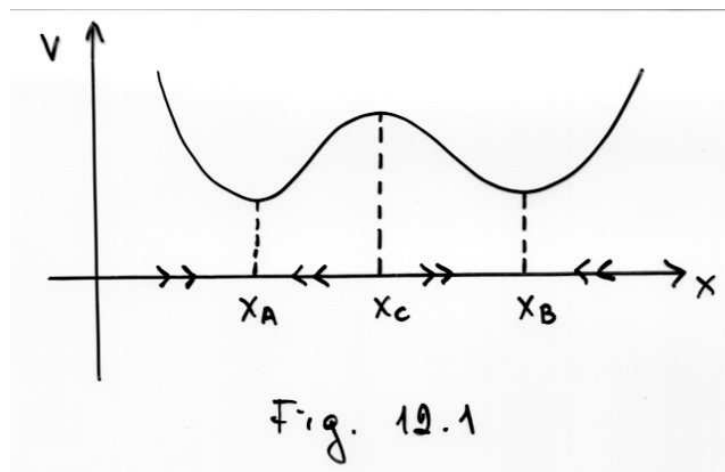
Detto ciò occorre capire a cosa è dovuto il comportamento singolare che si ha nei fenomeni critici. La singolarità segue dal fatto che nel limite termodinamico $N \rightarrow \infty$ occorrono infinite trasformazioni del gruppo di rinormalizzazione per eliminare tutti i gradi di libertà del sistema. Per apprezzare questo punto consideriamo il seguente esempio di comportamento singolare proveniente da una trasformazione analitica. Supponiamo di avere una particella in un potenziale unidimensionale $V(x)$, soggetta ad attrito

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} = -V'(x) \quad (12.28)$$

se l'attrito è sufficientemente grande possiamo trascurare il termine inerziale e (ponendo $k = 1$) si ottiene

$$\frac{dx}{dt} = -V'(x) \quad (12.29)$$

Supponiamo di avere il potenziale di doppia buca di Fig.12.1), con x_A e x_B i punti di minimo e x_C il punto di massimo. Se poniamo la particella in qualunque punto con $x < x_C$, essa



rotolerà sino a fermarsi in x_A indipendentemente dal punto iniziale. Se invece parte da un qualunque punto $x > x_C$ allora rotolerà in x_B . Dunque la posizione finale della particella è una funzione discontinua della posizione iniziale. Indichiamo allora con $x(t, x_0)$ la posizione della particella, che parte a $t = 0$ da x_0 , al tempo t . Per ogni valore finito di t questa è

una funzione continua di x_0 (vedi Fig. 12.2)), mentre per $t \rightarrow \infty$ essa diventa una funzione discontinua. Questo comportamento singolare non dipende da $V(x)$ che è una funzione

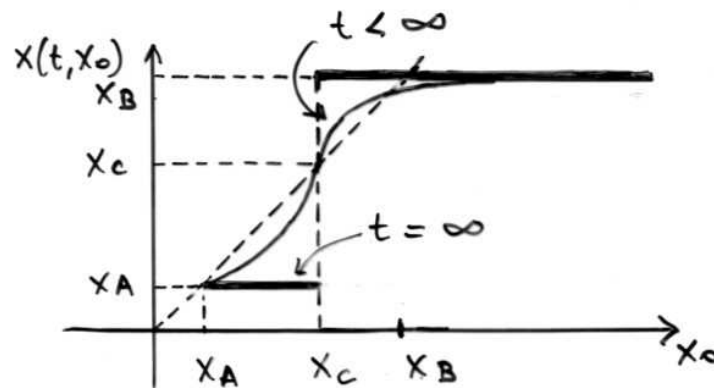


Fig. 12.2

analitica ma dipende invece dal limite per tempi infiniti che tende ad amplificare l'effetto della condizione iniziale. I punti x_A , x_B e x_C sono punti fissi dell'equazione differenziale (12.29). Se la particella si trova in uno di questi punti ad un certo istante vi rimarrà per un qualunque tempo successivo. Vediamo anche che x_C è un punto fisso repulsivo, mentre x_A e x_B sono di tipo attrattivo. L'insieme delle condizioni iniziali che fluiscono in un punto fisso viene detto il bacino di attrazione del punto fisso. Nel nostro esempio, il bacino di attrazione di x_A sono i punti $x < x_C$, quello di x_B sono i punti $x > x_C$, mentre il bacino di attrazione di x_C è x_C stesso.

XIII. PUNTI FISSI.

Lo scopo di questa sezione è di mostrare la rilevanza dei punti fissi nello studio del gruppo di rinormalizzazione. Supponiamo allora di conoscere la trasformazione $R_\ell[K]$. Un punto fisso di questa trasformazione è un punto $[K^*$ nello spazio delle costanti di accoppiamento tale che

$$[K^*] = R_\ell[K^*] \quad (13.1)$$

Abbiamo osservato come sotto la trasformazione R_ℓ la lunghezza di correlazione sia ridotta di un fattore ℓ . Dunque

$$\xi[K'] = \frac{\xi[K]}{\ell} \quad (13.2)$$

Pertanto al punto fisso

$$\xi[K^*] = \frac{\xi[K^*]}{\ell} \quad (13.3)$$

Vediamo così che al punto fisso si hanno solo due possibilità

$$\begin{aligned} \xi[K^*] &= 0, & \text{punto fisso banale} \\ \xi[K^*] &= \infty, & \text{punto fisso critico} \end{aligned} \quad (13.4)$$

Abbiamo visto che ogni punto fisso ha un bacino di attrazione, dunque tutti i punti nel bacino di un punto fisso fluiscono verso il punto stesso ed eventualmente lo raggiungono dopo un numero infinito di iterazioni di R_ℓ . D'altra parte è facile mostrare il seguente teorema

TEOREMA:

Tutti i punti nel bacino di attrazione di un punto fisso critico hanno lunghezza di correlazione infinita.

Supponiamo infatti di partire dal punto $[K]$, dopo n iterazioni di R_ℓ raggiungeremo il punto $[K^{(n)}]$ definito da

$$\xi[K] = \ell \xi[K^{(1)}] = \ell^2 \xi[K^{(2)}] = \dots \ell^n \xi[K^{(n)}] \quad (13.5)$$

Se prendiamo il limite $n \rightarrow \infty$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [K^{(n)}] = [K^*] \quad (13.6)$$

con $[K^*]$ punto fisso critico, allora $\xi[K^*] = \infty$, ed il teorema segue subito dalla 13.5).

A causa di questo teorema il bacino di attrazione di un punto fisso critico viene detto il manifold critico. Il fatto che tutti i punti sul manifold critico fluiscono verso lo stesso punto fisso è evidentemente al cuore della universalità dei fenomeni critici, ma non è la spiegazione completa. Infatti l'universalità del comportamento è mostrata da sistemi vicini al punto critico. Esamineremo allora cosa succede in vicinanza di un punto fisso. Notiamo anche che i punti fissi non sono necessariamente punti isolati, si possono avere anche linee o superfici di punti fissi.

Per studiare il comportamento di un sistema vicino ad un punto fisso, espandiamo gli accoppiamenti in quell'intorno

$$K_n = K_n^* + \delta K_n \quad (13.7)$$

Allora l'hamiltoniana è vicina all'hamiltoniana di punto fisso

$$\mathcal{H}[K^*] \equiv \mathcal{H}^* \quad (13.8)$$

Dunque avremo

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^* + \delta\mathcal{H} \quad (13.9)$$

Supponiamo adesso di effettuare una trasformazione R_ℓ sul nostro sistema $[K'] = R_\ell[K]$, ovvero

$$K'_n = K'_n[K] = K_n^* + \delta K'_n \quad (13.10)$$

D'altra parte si ha

$$K'_n[K^* + \delta K] = K_n^* + \sum_m \left. \frac{\partial K'_n}{\partial K_m} \right|_{K=K^*} \delta K_m + \mathcal{O}(\delta K^2) \quad (13.11)$$

Confrontando con la 13.10) segue

$$\delta K'_n = \sum_m M_{nm} \delta K_m \quad (13.12)$$

con

$$M_{nm} = \left. \frac{\partial K'_n}{\partial K_m} \right|_{K=K^*} \quad (13.13)$$

La 13.12) ci da trasformazione del gruppo di rinormalizzazione linearizzata nell'intorno del punto fisso $[K^*]$. La matrice \mathbf{M} è reale ma non è in generale simmetrica ed in principio si dovrebbe distinguere tra i suoi autovettori destri e sinistri. Non solo ma \mathbf{M} non sarà nemmeno generalmente diagonalizzabile. Nei sistemi di interesse succede però che \mathbf{M} è simmetrica e noi ci limiteremo a considerare questo caso. Notiamo anche che la matrice \mathbf{M} non è altro che la linearizzazione di R_ℓ intorno al punto fisso. Infatti

$$[K'] = R_\ell[K] = R_\ell[K^* + \delta K] = R_\ell[K^*] + \left. \frac{\partial R_\ell[K]}{\partial [K]} \right|_{K^*} \delta K = [K^*] + \left. \frac{\partial R_\ell[K]}{\partial [K]} \right|_{K^*} \delta K \quad (13.14)$$

e per confronto con la 13.13)

$$\mathbf{M} = \left. \frac{\partial R_\ell[K]}{\partial [K]} \right|_{K^*} \quad (13.15)$$

Indicheremo allora con un indice ℓ la matrice \mathbf{M} . Segue allora dalla proprietà di semigrupp delle trasformazioni R_ℓ , applicando la regola catena per la differenziazione

$$\frac{d}{d[K]} R_{\ell_1}[R_{\ell_2}[K]] \Big|_{K^*} = \sum_n \frac{dR_{\ell_1}}{dK_n} \Big|_{K^*} \frac{dR_{\ell_2}^n}{d[K]} \Big|_{K^*} = \frac{d}{d[K]} R_{\ell_1 \ell_2}[K] \Big|_{K^*} \quad (13.16)$$

da cui

$$\mathbf{M}^{(\ell_1)} \mathbf{M}^{(\ell_2)} = \mathbf{M}^{(\ell_1 \ell_2)} \quad (13.17)$$

Prendendo $\ell_1 = 1$, segue da questa relazione

$$\mathbf{M}^{(1)} = 1 \quad (13.18)$$

Differenziandola poi rispetto a ℓ_2 si ha

$$\mathbf{M}^{(\ell_1)} \frac{d\mathbf{M}^{(\ell_2)}}{d\ell_2} = \frac{d\mathbf{M}^{(\ell_1 \ell_2)}}{d(\ell_1 \ell_2)} \ell_1 \quad (13.19)$$

Ponendo $\ell_2 = 1$, $\ell_1 = \ell$, si ha

$$\mathbf{M}^{(\ell)} \frac{d\mathbf{M}^{(\ell)}}{d\ell} \Big|_{\ell=1} = \ell \frac{d\mathbf{M}^{(\ell)}}{d\ell} \quad (13.20)$$

Definiamo

$$Y = \frac{d\mathbf{M}^{(\ell)}}{d\ell} \Big|_{\ell=1} \quad (13.21)$$

L'equazione 13.19) diviene

$$\frac{d\mathbf{M}^{(\ell)}}{d\ell} = \frac{1}{\ell} \mathbf{M}^{(\ell)} Y \quad (13.22)$$

L'integrale di questa equazione, tenuto conto della condizione al contorno 13.18) è

$$\mathbf{M}^{(\ell)} = e^{Y \log \ell} \quad (13.23)$$

Se \mathbf{M}^ℓ è diagonalizzabile, possiamo diagonalizzare Y con gli stessi autovettori

$$Y_{nm} v_m^{(\sigma)} = y_\sigma v_n^{(\sigma)} \quad (13.24)$$

Introducendo gli autovalori di \mathbf{M}

$$M_{nm}^{(\ell)} v_m^{(\sigma)} = \Lambda_\sigma^{(\ell)} v_n^{(\sigma)} \quad (13.25)$$

si ha

$$\Lambda_\sigma^{(\ell)} = \ell^{y_\sigma} \quad (13.26)$$

Possiamo adesso domandarci come si trasformano i $[\delta K]$ sotto la trasformazione generata da $\mathbf{M}^{(\ell)}$ (vedi eq. 13.12)). A questo scopo è utile la seguente espansione

$$\delta K_n = \sum_{\sigma} a^{(\sigma)} v_n^{\sigma} \quad (13.27)$$

Nel caso in esame stiamo assumendo la matrice $\mathbf{M}^{(\ell)}$ simmetrica e quindi segue dalle proprietà di ortogonalità degli autovettori

$$a^{(\sigma)} = \sum_n \delta K_n v_n^{(\sigma)} \quad (13.28)$$

Usando ora la forma linearizzata 13.12) della trasformazione del gruppo di rinormalizzazione, si ha

$$\begin{aligned} \delta K'_n &= \sum_m M_{nm}^{(\ell)} \delta K_m = \sum_m M_{nm}^{(\ell)} \sum_{\sigma} a^{(\sigma)} v_m^{\sigma} = \\ &= \sum_{\sigma} \Lambda_{(\ell)}^{(\sigma)} a^{(\sigma)} v_n^{(\sigma)} \equiv \sum_{\sigma} a^{(\sigma)'} v_n^{(\sigma)} \end{aligned} \quad (13.29)$$

con

$$a^{(\sigma)'} = \Lambda_{(\ell)}^{(\sigma)} a^{(\sigma)} = \ell^{y_{\sigma}} a^{(\sigma)} \quad (13.30)$$

Questa equazione mostra come alcune delle componenti di $[\delta K]$ crescano sotto l'azione di $\mathbf{M}^{(\ell)}$, mentre altre diminuiscono. Il comportamento è determinato dal segno dell'esponente y_{σ} e come nel paragrafo precedente possiamo considerare tre casi

- (1) $y_{\sigma} > 0$ (caso rilevante), gli $a^{(\sigma)}$ crescono con ℓ
- (2) $y_{\sigma} < 0$ (caso irrilevante), gli $a^{(\sigma)}$ diminuiscono con ℓ
- (3) $y_{\sigma} = 0$ (caso marginale), gli $a^{(\sigma)}$ non cambiano con ℓ .

Vediamo così che dopo molte iterazioni solo le componenti di $[\delta K]$ lungo le direzioni $v^{(\sigma)}$ che sono rilevanti saranno importanti. Infatti le proiezioni di $[\delta K]$ lungo le altre direzioni o diminuiscono o rimangono costanti. Se partiamo con $[K]$ vicino a $[K^*]$, ma non essendo sul manifold critico, allora le direzioni che fluiscono lontano dal manifold stesso, corrispondono ad autovalori rilevanti. Gli autovalori irrilevanti corrispondono invece a flussi che finiscono al punto fisso. Evidentemente gli autovalori irrilevanti sono una base per lo spazio tangente al manifold critico nel punto fisso.

XIV. ORIGINE DELLO SCALING.

Cerchiamo di vedere in pratica come funzionano le considerazioni precedenti. Supponiamo di avere un sistema con una sola costante di accoppiamento, come il modello di Ising con

campo esterno nullo

$$H = K \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j \quad (14.1)$$

con

$$K = \beta J = \frac{J}{kT} \quad (14.2)$$

Sotto una trasformazione del gruppo di rinormalizzazione

$$T' = R_\ell[T] \quad (14.3)$$

Segue

$$T' - T^* = R_\ell[T] - R_\ell[T^*] = \left. \frac{dR_\ell}{dT} \right|_{T^*} (T - T^*) \quad (14.4)$$

dove si è usato $R_\ell[T^*] = T^*$. Segue dalla 13.26)

$$\left. \frac{dR_\ell}{dT} \right|_{T^*} = \ell^{yt} \quad (14.5)$$

Introducendo la temperatura ridotta

$$t = \frac{T - T^*}{T^*} \quad (14.6)$$

segue

$$t' = \ell^{yt} t \quad (14.7)$$

Se iteriamo la trasformazione n volte

$$t^{(n)} = (\ell^{yt})^n t = \ell^{nyt} t \quad (14.8)$$

Per derivare gli esponenti critici consideriamo come si trasforma la lunghezza di correlazione, che deve essere funzione dell'unica costante di accoppiamento, cioè di t . Sappiamo che sotto R_ℓ si ha

$$\xi' = R_\ell[\xi] = \frac{\xi}{\ell} \quad (14.9)$$

Quindi dopo n iterazioni

$$\xi(t^{(n)}) = \ell^{-n} \xi(t) \quad (14.10)$$

da cui

$$\xi(t) = \ell^n \xi(\ell^{nyt} t) \quad (14.11)$$

Aggiustiamo la trasformazione di scala ℓ in termini di una temperatura di riferimento t_0

$$\ell^n = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-1/yt} \quad (14.12)$$

segue

$$\xi(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1/y_t} \xi(t_0) \quad (14.13)$$

Ricordando la definizione dell'esponente critico, ν , associato alla lunghezza di correlazione si ha

$$\nu = \frac{1}{y_t} \quad (14.14)$$

Possiamo fare analoghe considerazioni sull'energia libera. Ricordiamo (vedi la 12.12) che la parte singolare dell'energia libera scala secondo la relazione

$$f_s(t) = \ell^{-d} f_s(t') \quad (14.15)$$

con $t' = R_\ell[t]$. Quindi

$$f_s(t) = \ell^{-nd} f_s(t^{(n)}) = \ell^{-nd} f_s(\ell^{ny_t} t) \quad (14.16)$$

Usando ancora la 14.12) per ℓ , si ottiene

$$f_s(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{d/y_t} f_s(t_0) \quad (14.17)$$

Usando f_s possiamo calcolare il calore specifico tramite una doppia differenziazione. Il risultato è

$$c \sim (t)^{-2+d/y_t} \quad (14.18)$$

e ricordando la definizione dell'esponente critico associato al calore specifico

$$\frac{d}{y_t} = 2 - \alpha \quad (14.19)$$

In congiunzione con la 14.14) si ottiene

$$\nu d = 2 - \alpha \quad (14.20)$$

si ritrova cioè la legge di Josephson.

Consideriamo adesso il caso fisicamente più interessante di due costanti di accoppiamento, quali la temperatura ed il campo esterno. Useremo dunque t e $h = \beta H$. Avremo ancora

$$f_s(t, h) = \ell^{-d} f_s(t', h') \quad (14.21)$$

con

$$t' = R_\ell^t[t, h], \quad h' = R_\ell^h[t, h] \quad (14.22)$$

Al punto fisso si ha

$$t^* = R_\ell^t[t^*, h^*], \quad h^* = R_\ell^h[t^*, h^*] \quad (14.23)$$

Si ha ovviamente, $t^* = 0$ e nel caso di un modello tipo Ising anche $h^* = 0$. Posto

$$\delta t = t - t^*, \quad \delta h = h - h^* \quad (14.24)$$

linearizzando la trasformazione vicino al punto fisso, si trova

$$\begin{pmatrix} \delta t' \\ \delta h' \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{(\ell)} \begin{pmatrix} \delta t \\ \delta h \end{pmatrix} \quad (14.25)$$

con

$$\mathbf{M}^{(\ell)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R_\ell^t}{\partial t} & \frac{\partial R_\ell^t}{\partial h} \\ \frac{\partial R_\ell^h}{\partial t} & \frac{\partial R_\ell^h}{\partial h} \end{pmatrix}_{t=t^*, h=h^*} \quad (14.26)$$

Nel caso generale gli autovettori di $\mathbf{M}^{(\ell)}$ sono combinazioni lineari di δt e δh , ma supporremo qui per semplicità che δt e δh non si mischino. In questo caso la matrice $\mathbf{M}^{(\ell)}$ è diagonale ed avremo

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial R_\ell^t}{\partial t} \right|_{t=t^*, h=h^*} &= \ell^{y_t} \\ \left. \frac{\partial R_\ell^h}{\partial h} \right|_{t=t^*, h=h^*} &= \ell^{y_h} \end{aligned} \quad (14.27)$$

con gli altri elementi di matrice nulli. Si avrà allora (prendiamo ora $t^* = h^* = 0$)

$$\begin{pmatrix} t' \\ h' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell^{y_t} & 0 \\ 0 & \ell^{y_h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ h \end{pmatrix} \quad (14.28)$$

Dopo n iterazioni avremo

$$\xi(t, h) = \ell^n \xi(\ell^{ny_t} t, \ell^{ny_h} h) \quad (14.29)$$

Per $h = 0$ si ritrova il risultato precedente

$$\xi(t, 0) = \ell^n \xi(\ell^{ny_t} t, 0) \quad (14.30)$$

ancora con $\nu = 1/y_t$. Nel caso $t = 0$ si ha invece

$$\xi(0, h) = \ell^n \xi(0, \ell^{ny_h} h) \quad (14.31)$$

e posto

$$\ell^{ny_h} h = h_0 \quad (14.32)$$

si ha

$$\xi(0, h) = \left(\frac{h}{h_0} \right)^{-1/y_h} \xi(0, h_0) \quad (14.33)$$

In modo del tutto analogo si trova per l'energia libera

$$f_s(t, h) = \ell^{-nd} f_s(\ell^{ny_t} t, \ell^{ny_h} h) \quad (14.34)$$

e posto ancora $\ell^{ny_t} t = t_0$, si ottiene

$$f_s(t, h) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{d/y_t} f_s \left(t_0, \left(\frac{t_0}{t} \right)^{y_h/y_t} h \right) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{d/y_t} f_s \left(t_0, (t_0)^{y_h/y_t} \frac{h}{t^{y_h/y_t}} \right) \quad (14.35)$$

Segue dalla 10.18)

$$2 - \alpha = \frac{d}{y_t} = d\nu, \quad \Delta = \frac{y_h}{y_t} \quad (14.36)$$

Dunque y_h è collegato all'esponente di gap. Abbiamo dimostrato che le ipotesi di scaling seguono dal gruppo di rinormalizzazione. Inoltre quando siamo in grado di calcolare il coarse-graining definito da R_ℓ siamo anche in grado di stimare gli esponenti critici.

Possiamo studiare ora l'effetto delle variabili irrilevanti. Supponiamo ancora per semplicità che sotto la trasformazione del gruppo di rinormalizzazione t e h non si mischino tra loro e con gli accoppiamenti irrilevanti che supporremo di avere diagonalizzato. Allora l'energia libera si trasforma secondo la relazione

$$f_s(t, h, \tilde{K}_3, \tilde{K}_4, \dots) = \ell^{-d} f_s(\ell^{y_t} t, \ell^{y_h} h, \ell^{y_3} \tilde{K}_3, \ell^{y_4} \tilde{K}_4, \dots) \quad (14.37)$$

con

$$y_t, y_h > 0, \quad y_3, y_4 < 0 \quad (14.38)$$

dato che per ipotesi \tilde{K}_3 e \tilde{K}_4 sono irrilevanti. Dopo n iterazioni

$$f_s(t, h, \tilde{K}_3, \tilde{K}_4, \dots) = \ell^{-nd} f_s(\ell^{ny_t} t, \ell^{ny_h} h, \ell^{ny_3} \tilde{K}_3, \ell^{ny_4} \tilde{K}_4, \dots) \quad (14.39)$$

Effettuando la scelta consueta 14.12)

$$f_s(t, h, \tilde{K}_3, \tilde{K}_4, \dots) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{d/y_t} f_s(t_0, \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-y_h/y_t} h, \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-y_3/y_t} \tilde{K}_3, \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-y_4/y_t} \tilde{K}_4, \dots) \quad (14.40)$$

Nel limite $t \rightarrow 0$, dato che

$$\frac{y_3}{y_t}, \frac{y_4}{y_t} < 0 \quad (14.41)$$

segue

$$f_s(t, h, \tilde{K}_3, \tilde{K}_4, \dots) \sim t^{d/y_t} f(t_0, t^{-y_h/y_t} h, 0, 0, \dots) \quad (14.42)$$

Abbiamo assunto qui che f_s sia analitica nel limite in cui gli accoppiamenti irrilevanti vanno a zero. Questa ipotesi non sempre è vera, in tal caso si parla di una variabile irrilevante pericolosa. L'accoppiamento quartico della teoria di Landau, u_0 , è di questo tipo. Notiamo che la rilevanza o irrilevanza di questo accoppiamento dipende dalle dimensioni, infatti si può dimostrare che si ha $y_{u_0}/y_t = -(d-4)/2$.

XV. GRUPPO DI RINORMALIZZAZIONE PER IL MODELLO DI ISING IN 2-D SU UN RETICOLO TRIANGOLARE.

Applicheremo adesso le idee delle sezioni precedenti costruendo in modo approssimato la trasformazione R_ℓ nel caso del modello di Ising in due dimensioni su un reticolo triangolare. Come abbiamo visto, questo ci permette di calcolare gli esponenti critici. Il modello è definito dall'hamiltoniana

$$\mathcal{H} = K \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j \quad (15.1)$$

con l'usuale interazione tra primi vicini. Il reticolo sul quale sono definite le variabili di spin è un reticolo triangolare, con lattice size a con gli spin sui vertici dei triangoli. Per calcolare la trasformazione R_ℓ iniziamo con il definire i blocchi di spin. Questi saranno definiti da una regola di maggioranza, calcolando il segno della somma dei tre spin ai vertici di ogni triangolo

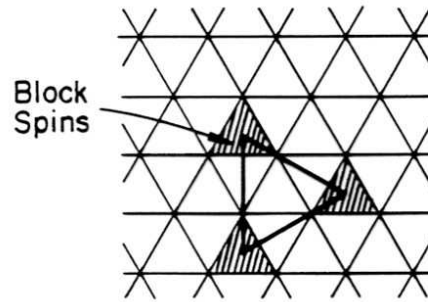
$$S_I = \text{segno} (S_1^I + S_2^I + S_3^I) \quad (15.2)$$

Lo spin così definito è posto al centro del triangolo ed il nuovo reticolo è ottenuto unendo gli spin di blocco prima definiti. Il nuovo reticolo (vedi Fig. 15.1)) è ancora un reticolo triangolare di lato

$$a' = \frac{1}{3}a \cos 30^\circ + a \cos 30^\circ + \frac{2}{3}a \cos 30^\circ = 2a \cos 30^\circ = \sqrt{3} a \quad (15.3)$$

Il fattore di scaling è dunque

$$\ell = \sqrt{3} \quad (15.4)$$



Block spin construction for the Ising model on a triangular lattice.

Fig. 15.1

Indichiamo con $\sigma_I = (S_1^I, S_2^I, S_3^I)$ la terna di spin all'interno del triangolo originario. I valori ± 1 per lo spin di blocco S_I per le varie configurazioni σ_I sono allora i seguenti

Spin di blocco	$\{\sigma_I\}$	Energia della configurazione	
$S_I = +1$	$\downarrow\uparrow\uparrow$	$-K$	(15.5)
	$\uparrow\downarrow\uparrow$	$-K$	
	$\uparrow\uparrow\downarrow$	$-K$	
	$\uparrow\uparrow\uparrow$	$3K$	
$S_I = -1$	$\uparrow\downarrow\downarrow$	$-K$	
	$\downarrow\uparrow\downarrow$	$-K$	
	$\downarrow\downarrow\uparrow$	$-K$	
	$\downarrow\downarrow\downarrow$	$3K$	

L'hamiltoniana effettiva si ottiene sommando sulle terne σ_I che corrispondono ad un fissato spin di blocco S_I

$$e^{\mathcal{H}'(S_I)} = \sum_{\sigma_I} e^{\mathcal{H}(S_I, \sigma_I)} = \sum_{S_i} \delta(S_I - \text{segno}(S_1^I + S_2^I + S_3^I)) e^{\mathcal{H}(S_i)} \quad (15.6)$$

Per il calcolo di \mathcal{H}' risulta conveniente dividere \mathcal{H} in due parti

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V \quad (15.7)$$

dove abbiamo separato le interazioni all'interno dei blocchi originali rispetto a quelle che agiscono tra blocchi distinti

$$\mathcal{H}_0 = K \sum_I \sum_{i,j \in I} S_i S_j \quad (15.8)$$

$$V = K \sum_{I \neq J} \sum_{i \in I, j \in J} S_i S_j \quad (15.9)$$

L'idea è quella di considerare V come una perturbazione. Definiremo allora le medie rispetto all'hamiltoniana \mathcal{H}_0

$$\langle A \rangle = \frac{\sum_{\sigma_I} e^{\mathcal{H}_0(S_I, \sigma_I)} A(S_I, \sigma_I)}{\sum_{\sigma_I} e^{\mathcal{H}_0(S_I, \sigma_I)}} \quad (15.10)$$

Segue allora dalle 15.6) e 15.7)

$$e^{\mathcal{H}'(S_I)} = \langle e^V \rangle \sum_{\sigma_I} e^{\mathcal{H}_0(S_I, \sigma_I)} \quad (15.11)$$

Il calcolo di $\sum_{\sigma_I} e^{\mathcal{H}_0(S_I, \sigma_I)}$ è facile dato che l'interazione è all'interno di ogni blocco. Il risultato si fattorizza ed otterremo la funzione di partizione $Z_0(K)$ relativa al singolo blocco con S_I fissato elevata al numero dei nuovi blocchi, che sono in numero pari a $M = N/3$. Dalla 15.5) vediamo che per entrambi i valori di S_I si hanno tre configurazioni di energia $-K$ ed una di energia $3K$. Quindi

$$Z_0(K) = \sum_{S_1, S_2, S_3} e^{K(S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_1)} = 3e^{-K} + e^{3K} \quad (15.12)$$

Troviamo allora

$$e^{\mathcal{H}'(S_I)} = \langle e^V \rangle \left(3e^{-K} + e^{3K} \right)^{N/3} \quad (15.13)$$

Il calcolo di $\langle e^V \rangle$ si effettua tramite l'espansione in cumulanti

$$\begin{aligned} \log \langle e^V \rangle &= \log [e^{\langle V \rangle} \langle e^{V - \langle V \rangle} \rangle] \\ &= \langle V \rangle + \log \langle e^{V - \langle V \rangle} \rangle \\ &= \langle V \rangle + \log \langle 1 + (V - \langle V \rangle) + \frac{1}{2}(V - \langle V \rangle)^2 + \dots \rangle \\ &= \langle V \rangle + \log \langle 1 + \frac{1}{2}(V - \langle V \rangle)^2 + \dots \rangle \\ &= \langle V \rangle + \frac{1}{2} \langle (V - \langle V \rangle)^2 \rangle + \dots \end{aligned} \quad (15.14)$$

da cui

$$\langle e^V \rangle = e^{\langle V \rangle + \frac{1}{2} \langle (V - \langle V \rangle)^2 \rangle + \dots} \quad (15.15)$$

Se ci limitiamo all'ordine più basso

$$\langle e^V \rangle \sim e^{\langle V \rangle} \quad (15.16)$$

Otteniamo allora

$$e^{\mathcal{H}'(S_I)} = e^{\langle V \rangle} \left(3e^{-K} + e^{3K} \right)^{N/3} \quad (15.17)$$

da cui

$$\mathcal{H}'(S_I) = \langle V \rangle + \frac{N}{3} \log(3e^{-K} + e^{3K}) \quad (15.18)$$

Il termine $\langle V \rangle$ accoppia blocchi vicini

$$V = \sum_{I \neq J} V_{IJ} \quad (15.19)$$

con (nell'esempio in Fig. 15.2))

$$V_{IJ} = K S_1^I (S_2^J + S_3^J) \quad (15.20)$$

Per calcolare il valor medio di V_{IJ} , osserviamo che l'hamiltoniana \mathcal{H}_0 non accoppia spin in

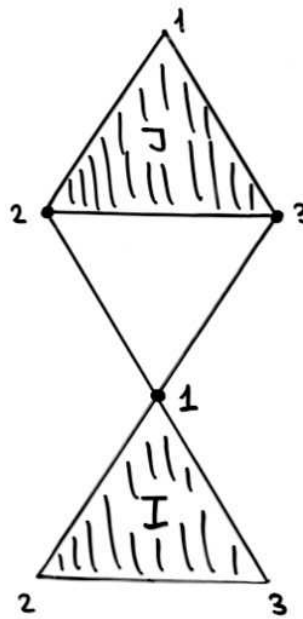


Fig. 15.2

blocchi diversi, quindi la media su blocchi distinti si fattorizza

$$\langle V_{IJ} \rangle = K \langle S_1^I \rangle (\langle S_2^J \rangle + \langle S_3^J \rangle) \quad (15.21)$$

Considerando ancora le configurazioni di eq. 15.5), con $S_I = +1$

$$\begin{array}{lll}
 \uparrow\uparrow\uparrow & E = 3K & S_1^I = +1 \\
 \uparrow\uparrow\downarrow & E = -K & S_1^I = +1 \\
 \uparrow\downarrow\uparrow & E = -K & S_1^I = +1 \\
 \downarrow\uparrow\uparrow & E = -K & S_1^I = -1
 \end{array} \tag{15.22}$$

si ottiene

$$\langle S_1^I \rangle = \frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} = \frac{e^{4K} + 1}{e^{4K} + 3} \tag{15.23}$$

Nel caso $S_I = -1$ si ottiene

$$\begin{array}{lll}
 \downarrow\downarrow\downarrow & E = 3K & S_1^I = -1 \\
 \downarrow\downarrow\uparrow & E = -K & S_1^I = -1 \\
 \downarrow\uparrow\downarrow & E = -K & S_1^I = -1 \\
 \uparrow\downarrow\downarrow & E = -K & S_1^I = +1
 \end{array} \tag{15.24}$$

Pertanto

$$\langle S_1^I \rangle = -\frac{e^{4K} + 1}{e^{4K} + 3} \tag{15.25}$$

Il risultato delle due configurazioni può allora essere scritto nella forma

$$\langle S_1^I \rangle = \frac{e^{4K} + 1}{e^{4K} + 3} S_I \tag{15.26}$$

La media di ogni spin porta allo stesso valore, e quindi

$$\langle V \rangle = 2K\Phi(K)^2 \sum_{\langle IJ \rangle} S_I S_J \tag{15.27}$$

con

$$\Phi(K) = \frac{e^{4K} + 1}{e^{4K} + 3} \tag{15.28}$$

Il risultato al primo ordine in V è allora

$$\mathcal{H}'(S_I) = \frac{N}{3} \log(3e^{-K} + e^{3K}) + 2K\Phi(K)^2 \sum_{\langle IJ \rangle} S_I S_J \tag{15.29}$$

Eccetto per il termine costante che rinormalizza lo zero dell'energia ed è pertanto irrilevante, vediamo che l'hamiltoniana di blocco è identica a quella originaria eccetto per la rinormalizzazione subita dalla costante di accoppiamento

$$K' = R_\ell[K] = 2K\Phi(K)^2 \tag{15.30}$$

Possiamo adesso calcolare i punti fissi della trasformazione

$$K^* = 2K^*\Phi(K^*)^2 \quad (15.31)$$

Evidentemente sono punti fissi $K = 0$, $K = \infty$ ed il K^* che soddisfa

$$1 = 2\Phi(K^*)^2 \quad (15.32)$$

Segue dalla 15.28)

$$e^{4K^*} + 3 = \sqrt{2}(e^{4K^*} + 1) \quad (15.33)$$

da cui

$$K^* \equiv K_c = \frac{1}{4} \log(1 + 2\sqrt{2}) \sim 0.336 \quad (15.34)$$

Il calcolo esatto di Onsager da il risultato

$$K_c = \frac{1}{4} \log 3 \sim 0.275 \quad (15.35)$$

Possiamo ora calcolare gli autovalori y_K , cioè gli esponenti relativi ai vari punti critici. Infatti sappiamo dalla nostra analisi generale che dobbiamo avere

$$\left. \frac{dK'}{dK} \right|_{K^*} = (\sqrt{3})^{y_{K^*}} \quad (15.36)$$

Dalla 15.30) si ha

$$\frac{dK'}{dK} = 2\Phi(K)^2 + 4K\Phi(K)\Phi'(K) \quad (15.37)$$

Si trova

$$\Phi'(K) = 8 \frac{e^{4K}}{(e^{4K} + 3)^2} \quad (15.38)$$

e quindi

$$\left. \frac{dK'}{dK} \right|_{K^*=0} = \frac{1}{2} \quad (15.39)$$

$$\left. \frac{dK'}{dK} \right|_{K^*=\infty} = 2 \quad (15.40)$$

$$\left. \frac{dK'}{dK} \right|_{K^*=K_c} = 1 + 2\sqrt{2} \frac{1 + 2\sqrt{2}}{(1 + \sqrt{2})^2} K_c \sim 1.62 \quad (15.41)$$

e poiché

$$y_{K^*} = \log \left. \frac{dK'}{dK} \right|_{K^*} \frac{1}{\log \sqrt{3}} \quad (15.42)$$

si trova

$$y_0 = -1.26, \quad y_\infty = +1.26, \quad y_{K_c} = +0.88 \quad (15.43)$$

Dunque, ricordando che $K = \beta J = J/kT$, vediamo che il punto fisso $K^* = 0$ corrisponde alla fase ad alta temperatura, è quindi un punto fisso paramagnetico. Essendo l'esponente critico negativo questo è un punto fisso attrattivo. Il punto fisso K_c che è situato tra gli altri due, ha esponente positivo ed è quindi instabile. Cioè i flussi sono espulsi da K_c ed attratti da $K^* = 0$ e $K^* = \infty$. È da osservare che il punto fisso $K^* = \infty$ ha esponente positivo e quindi dovrebbe essere instabile. Ma questo risulta un artificio dovuto alla particolare locazione del punto. Infatti vediamo dalla relazione di ricorrenza che per grandi valori di K , si ha $\Phi(K) \sim 1$ e quindi

$$K' \sim 2K \quad (15.44)$$

Pertanto $K' > K$ mostrando che il flusso è verso il punto all' ∞ .

Tornando al punto critico K_c è ovvio che l'esponente critico relativo a K coincide con quello per T , cioè $y_{K_c} = y_t$. Pertanto dalla 14.14)

$$\nu = \frac{1}{y_t} \sim 1.14 \quad (15.45)$$

da confrontare con la soluzione esatta di Onsager

$$\nu = 1 \quad (15.46)$$

In questo caso la teoria di campo medio dà invece

$$K_c = \frac{1}{6}, \quad \nu = \frac{1}{2} \quad (15.47)$$

XVI. IL MODELLO GAUSSIANO.

Come ulteriore applicazione consideriamo la trasformazione del gruppo di rinormalizzazione, così come l'abbiamo definita in Sezione 12), applicata al modello gaussiano. Usando lo stesso tipo di notazioni della Sezione 9), poniamo

$$H_{\text{eff}} = \beta L = \int d^d \vec{r} \left[\frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} r_0 \phi^2 \right] \quad (16.1)$$

con

$$r_0 = 2 \frac{at}{\gamma} \quad (16.2)$$

Effettuiamo la separazione

$$\phi(\vec{r}) = \phi_\ell(\vec{r}) + \phi_H(\vec{r}) \quad (16.3)$$

con

$$\phi_H(\vec{r}) = \int_{\Lambda/\ell}^{\Lambda} \frac{d^d k}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \hat{\phi}(\vec{k}) \quad (16.4)$$

e

$$\phi_\ell(\vec{r}) = \int_0^{\Lambda/\ell} \frac{d^d k}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \hat{\phi}(\vec{k}) \quad (16.5)$$

dove $\hat{\phi}(\vec{k})$ è definito da

$$\phi(\vec{r}) = \int_0^{\Lambda} \frac{d^d k}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \hat{\phi}(\vec{k}) \quad (16.6)$$

In termini dei campi nello spazio degli impulsi, l'hamiltoniana diviene

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}}(\hat{\phi}) &= \int d^d \vec{r} \frac{1}{2V} \int_0^{\Lambda} d^d \vec{k} d^d \vec{k}' [-\vec{k} \cdot \vec{k}' + r_0] e^{i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{r}} \hat{\phi}(\vec{k}) \hat{\phi}(\vec{k}') = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\Lambda} d^d \vec{k} [|\vec{k}|^2 + r_0] \hat{\phi}(\vec{k}) \hat{\phi}(-\vec{k}) \equiv H_\ell(\hat{\phi}_\ell) + H_H(\hat{\phi}_H) \end{aligned} \quad (16.7)$$

dove

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_\ell(k) &= \hat{\phi}(k), & 0 \leq |\vec{k}| \leq \frac{\Lambda}{\ell} \\ \hat{\phi}_H(k) &= \hat{\phi}(k), & \frac{\Lambda}{\ell} \leq |\vec{k}| \leq \Lambda \end{aligned} \quad (16.8)$$

Dato che l'hamiltoniana si separa in due contributi indipendenti, la funzione di partizione si fattorizza

$$Z[r_0] = \int \mathcal{D}(\hat{\phi}) e^{-H_{\text{eff}}} = \int \mathcal{D}(\hat{\phi}_\ell) e^{-H_\ell} \int \mathcal{D}(\hat{\phi}_H) e^{-H_H} = Z_\ell[r_0] Z_H[r_0] \quad (16.9)$$

Il fattore Z_H non dipende dai campi ϕ_ℓ ed influisce quindi sul valore dell'energia libera senza alterare le proprietà di scaling. In ogni caso il suo calcolo è molto semplice

$$\begin{aligned} Z_H[r_0] &= \int \mathcal{D}(\hat{\phi}_H) e^{-H_H} = \int \mathcal{D}(\hat{\phi}_H) e^{-\frac{1}{2} \int_{\Lambda/\ell}^{\Lambda} d^d \vec{k} [|\vec{k}|^2 + r_0] \hat{\phi}(\vec{k}) \hat{\phi}(-\vec{k})} = \\ &= \left[\det \left(\frac{|\vec{k}|^2 + r_0}{2\pi} \right) \right]^{-1/2} = e^{-\frac{1}{2} \text{Tr} \log \left(\frac{|\vec{k}|^2 + r_0}{2\pi} \right)} = \\ &= e^{-\frac{V}{2} \int_{\Lambda/\ell}^{\Lambda} \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \log \frac{|\vec{k}|^2 + r_0}{2\pi}} \end{aligned} \quad (16.10)$$

Il fattore interessante è Z_ℓ

$$Z_\ell[r_0] = \int \mathcal{D}(\hat{\phi}_\ell) e^{-\frac{1}{2} \int_0^{\Lambda/\ell} d^d \vec{k} [|\vec{k}|^2 + r_0] \hat{\phi}(\vec{k}) \hat{\phi}(-\vec{k})} \quad (16.11)$$

Occorre adesso riscalarle le lunghezze di un fattore $1/\ell$ dato che l'unità di misura sul reticolo cambia di un fattore ℓ . In corrispondenza gli impulsi vanno riscalati di un fattore ℓ . Faremo dunque la trasformazione

$$\vec{k} \rightarrow \vec{k}' = \ell \vec{k} \quad (16.12)$$

Segue

$$H_\ell[\hat{\phi}_\ell] = \frac{1}{2} \int_0^{\Lambda/\ell} d^d \vec{k} [|\vec{k}|^2 + r_0] \hat{\phi}(\vec{k}) \hat{\phi}(-\vec{k}) = \frac{1}{2} \int_0^\Lambda d^d \vec{k}' \ell^{-d} [\ell^{-2} |\vec{k}'|^2 + r_0] \hat{\phi}\left(\frac{\vec{k}'}{\ell}\right) \hat{\phi}\left(-\frac{\vec{k}'}{\ell}\right) \quad (16.13)$$

Conviene rinormalizzare i campi in modo da ottenere la normalizzazione ad un fattore $1/2$ del termine di gradiente. In questo modo si evita il punto fisso banale con il termine cinetico nullo e tutti i siti disaccoppiati. Poniamo allora

$$\tilde{\phi}(\vec{k}) = z_\ell^{-1} \hat{\phi}_\ell(\vec{k}/\ell) \quad (16.14)$$

e fissiamo z_ℓ dalla condizione

$$z_\ell^2 \ell^{-d-2} = 1 \quad (16.15)$$

da cui

$$z_\ell = \ell^{1+d/2} \quad (16.16)$$

Si ottiene quindi

$$H_\ell(\hat{\phi}_\ell) = \frac{1}{2} \int_0^\Lambda d^d \vec{k} [|\vec{k}|^2 + r_\ell] \tilde{\phi}(\vec{k}) \tilde{\phi}(-\vec{k}) \quad (16.17)$$

con

$$r_\ell = r_0 z_\ell^2 \ell^{-d} = r_0 \ell^2 \quad (16.18)$$

Questo risultato era scontato dato che non si possono avere in questo caso dimensioni anomale (abbiamo un campo libero) e sappiamo che le dimensioni di r_0 sono pari a -2 . I punti fissi della trasformazione sono $r_0 = 0$ che corrisponde a $T = T_c$, e $r_0 = \infty$ che corrisponde a $T = \infty$. In questo caso il termine cinetico è trascurabile e tutti i siti sono disaccoppiati. Per quanto riguarda il punto $r_0 = 0$, usando le definizioni di sezione 14, si ha

$$R_\ell[r_0] = r_0 \ell^2 \quad (16.19)$$

e quindi

$$\left. \frac{dR_\ell[r_0]}{dr_0} \right|_{r_0=0} = \ell^2 \quad (16.20)$$

Pertanto l'esponente critico di r_0 è dato da

$$y_r = 2 \quad (16.21)$$

Ma dato che $r_0 \sim t$ segue $y_t = y_r = 2$. E facendo ancora uso dell'analisi di Sezione 14 si ottiene

$$\nu = \frac{1}{y_t} = \frac{1}{2} \quad (16.22)$$

Occorre osservare che nel modello gaussiano la fase a bassa temperatura non è definita. Infatti l'integrazione gaussiana diverge sotto la temperatura critica ($r_0 < 0$). Una ulteriore osservazione riguarda i termini del tipo

$$w(\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{r}))^2 \quad (16.23)$$

Nello spazio degli impulsi questi producono termini del tipo

$$w|\vec{k}|^4 \quad (16.24)$$

Lo scaling di questi termini è dato da

$$w_\ell = \ell^{-d} \ell^{-4} w z_\ell^2 = \ell^{-2} w \quad (16.25)$$

Pertanto w è un accoppiamento irrilevante. Questa osservazione spiega perché l'invarianza per rotazioni venga restaurata in vicinanza del punto critico. Per esempio in modelli sul reticolo compaiono termini del tipo

$$w \sum_{i=1}^d k_i^4 \quad (16.26)$$

Questi termini non sono rotazionalmente invarianti, ma sono irrilevanti al punto critico.

XVII. IL PUNTO FISSO GAUSSIANO.

L'analisi della Sezione precedente può essere arricchita introducendo il termine di interazione $u_0 \phi^4/4$. Nello spazio di Fourier si ha

$$\begin{aligned} \int d^d \vec{r} \frac{u_0}{4} \phi^4(\vec{r}) &= \int d^d \vec{r} \frac{u_0}{4V^2} \int \left(\prod_{i=1}^4 d^d \vec{k}_i \hat{\phi}(\vec{k}_i) \right) e^{i(\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_4) \cdot \vec{r}} = \\ &= \frac{u_0}{4V} \int d^d \vec{k}_1 d^d \vec{k}_2 d^d \vec{k}_3 \hat{\phi}(\vec{k}_1) \hat{\phi}(\vec{k}_2) \hat{\phi}(\vec{k}_3) \hat{\phi}(-\vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3) \end{aligned} \quad (17.1)$$

Vogliamo studiare l'effetto di questa perturbazione per $d > 4$. Posto

$$\mathcal{V} = \int d^d \vec{r} \frac{u_0}{4} \phi^4(\vec{r}) \quad (17.2)$$

ed indicando con H_0 l'hamiltoniana libera avremo

$$e^{-H_\ell} = e^{-H_0(\phi_\ell)} \int \mathcal{D}(\phi_H) e^{-H_0(\phi_H) - \mathcal{V}(\phi_\ell, \phi_H)} \quad (17.3)$$

Sviluppando al primo ordine in \mathcal{V}

$$e^{-H_\ell} = e^{-H_0(\phi_\ell)} \int \mathcal{D}(\phi_H) e^{-H_0(\phi_H)} (1 - \mathcal{V}(\phi_\ell, \phi_H) + \dots) \quad (17.4)$$

Da cui

$$\begin{aligned} H_\ell(\phi_\ell) &= H_0(\phi_\ell) - \log \int \mathcal{D}(\phi_H) e^{-H_0(\phi_H)} (1 - \mathcal{V}(\phi_\ell, \phi_H) + \dots) = \\ &= H_0(\phi_\ell) - \log \int \mathcal{D}(\phi_H) e^{-H_0(\phi_H)} + \frac{\int \mathcal{D}(\phi_H) \mathcal{V}(\phi_\ell, \phi_H) e^{-H_0(\phi_H)}}{\int \mathcal{D}(\phi_H) e^{-H_0(\phi_H)}} + \dots \end{aligned} \quad (17.5)$$

Anche adesso il termine logaritmico può essere trascurato dato che non contiene i campi ϕ_ℓ .

Scriveremo dunque

$$H_\ell(\phi_\ell) = H_0(\phi_\ell) + \frac{\int \mathcal{D}(\phi_H) \mathcal{V}(\phi_\ell, \phi_H) e^{-H_0(\phi_H)}}{\int \mathcal{D}(\phi_H) e^{-H_0(\phi_H)}} + \dots \quad (17.6)$$

Dobbiamo dunque calcolare il valor medio di ϕ^4 usando l'hamiltoniana quadratica $H_0(\phi_H)$.

Si ha allora

$$\langle \mathcal{V} \rangle = \frac{u_0}{4} \langle \phi^4 \rangle = \frac{u_0}{4} \langle (\phi_\ell + \phi_H)^4 \rangle = \frac{u_0}{4} (\phi_\ell^4 + 6\phi_\ell^2 \langle \phi_H^2 \rangle + \langle \phi_H^4 \rangle) \quad (17.7)$$

dove abbiamo usato il fatto che il valore di aspettazione gaussiano di un numero dispari di campi è nullo. L'ultimo termine di questa espressione non dipende da ϕ_ℓ e può quindi essere ignorato. Per quanto concerne il secondo termine dovremo valutare la funzione di Green $\langle \phi_H^2 \rangle$. Questa non è altro che la funzione di correlazione libera con la restrizione $\Lambda/\ell \leq |\vec{k}| \leq \Lambda$. Dunque

$$\langle \phi_H(\vec{r}) \phi_H(\vec{r}') \rangle = \int_{\Lambda/\ell}^{\Lambda} \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}}{|\vec{k}|^2 + r_0} \equiv G_H(\vec{r} - \vec{r}') \quad (17.8)$$

Si ottiene allora

$$H_\ell(\phi_\ell) = \int d^d \vec{r} \left[\frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi_\ell)^2 + \frac{1}{2} (r_0 + 3u_0 G_H(0)) \phi_\ell^2 + \frac{u_0}{4} \phi_\ell^4 \right] \quad (17.9)$$

Procederemo adesso nello spazio degli impulsi. Si ha allora

$$H_\ell(\hat{\phi}_\ell) = \frac{1}{2} \int_0^{\Lambda/\ell} d^d \vec{k} [|\vec{k}|^2 + (r_0 + 3u_0 G_H(0)) \hat{\phi}_\ell(\vec{k}) \phi_\ell(-\vec{k}) + \\ + \frac{u_0}{4V} \int_0^{\Lambda/\ell} d^d \vec{k}_1 d^d \vec{k}_2 d^d \vec{k}_3 \hat{\phi}_\ell(\vec{k}_1) \hat{\phi}_\ell(\vec{k}_2) \hat{\phi}_\ell(\vec{k}_3) \hat{\phi}_\ell(-\vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3)] \quad (17.10)$$

Effettuiamo adesso la trasformazione del gruppo di rinormalizzazione

$$\vec{k} \rightarrow \vec{k}' = \ell \vec{k}, \quad \hat{\phi}_\ell(\vec{k}) = \ell^{1+d/2} \tilde{\phi}_\ell(\ell \vec{k}) \quad (17.11)$$

Si trova allora (richiamando \vec{k}' con \vec{k})

$$H_\ell(\tilde{\phi}_\ell) = \frac{1}{2} \int_0^\Lambda d^d \vec{k} \ell^{-d} [\ell^{-2} |\vec{k}|^2 + (r_0 + 3u_0 G_H(0)) \ell^{2+d} \tilde{\phi}_\ell(\vec{k}) \tilde{\phi}_\ell(-\vec{k}) + \\ + \frac{u_0}{4V} \int_0^\Lambda d^d \vec{k}_1 d^d \vec{k}_2 d^d \vec{k}_3 \ell^{-3d} \ell^{4+2d} \tilde{\phi}_\ell(\vec{k}_1) \tilde{\phi}_\ell(\vec{k}_2) \tilde{\phi}_\ell(\vec{k}_3) \tilde{\phi}_\ell(-\vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3)] \quad (17.12)$$

Segue dunque

$$r_\ell = [r_0 + 3u_0 G_H(0)] \ell^2, \quad u_\ell = u_0 \ell^{4-d} \quad (17.13)$$

Dobbiamo poi calcolare la dipendenza da ℓ di $G_H(0)$

$$G_H(0) = \int_{\Lambda/\ell}^\Lambda \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{|\vec{k}|^2 + r_0} \quad (17.14)$$

Questo integrale non ha divergenze infrarosse nel limite $t \rightarrow 0$, e dato che siamo interessati a questa regione possiamo porre $r_0 = 0$. Segue

$$G_H(0) = S_d \int_{\Lambda/\ell}^\Lambda \frac{k^{d-1} dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2} = \frac{2\pi^{d/2}}{(2\pi)^d \Gamma(\frac{d}{2})} \left[\frac{k^{d-2}}{d-2} \right]_{\Lambda/\ell}^\Lambda = \\ = \frac{2}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(\frac{d}{2})} \frac{1}{d-2} \Lambda^{d-2} (1 - \ell^{2-d}) \quad (17.15)$$

dove si è fatto uso della equazione 27.8) della I parte per la superficie della sfera in d dimensioni. Si ha dunque

$$G_H(0) = \frac{2\Lambda^{d-2}}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(\frac{d}{2})} \frac{1}{d-2} (1 - \ell^{2-d}) \equiv \frac{B}{3} (1 - \ell^{2-d}) \quad (17.16)$$

La trasformazione del gruppo di rinormalizzazione nello spazio dei parametri (u_0, r_0) è allora data da

$$u_\ell = \ell^{4-d} u_0 \\ r_\ell = \ell^2 [r_0 + u_0 B (1 - \ell^{2-d})] \quad (17.17)$$

Queste equazioni hanno un punto fisso per $u_0 = r_0 = 0$. La matrice $\mathbf{M}^{(\ell)}$ che linearizza la trasformazione è data da

$$\mathbf{M}_{ij}^{(\ell)} = \left. \frac{\partial R_\ell^i}{\partial K_j} \right|_{K^*}, \quad i, j = r, u \quad (17.18)$$

dove abbiamo definito $K_r = r_0$ e $K_u = u_0$, e $K^* = (0, 0)$. Si ha allora

$$\mathbf{M}^{(\ell)} = \begin{bmatrix} \ell^2 & B(\ell^2 - \ell^\epsilon) \\ 0 & \ell^\epsilon \end{bmatrix} \quad (17.19)$$

dove abbiamo definito $\epsilon = 4 - d$. Notiamo che questa definizione di ϵ differisce di un fattore 2 da quella usata nella prima parte del corso dove avevamo posto $\epsilon = 2 - \omega = 2 - d/2$. Gli esponenti critici relativi agli autovalori di questa matrice sono evidentemente

$$y_1 = 2, \quad y_2 = \epsilon \quad (17.20)$$

mentre gli autovettori si calcolano da

$$\begin{bmatrix} \ell^2 & B(\ell^2 - \ell^\epsilon) \\ 0 & \ell^\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \ell^2 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (17.21)$$

da cui si trova

$$\begin{aligned} \ell^2 a + Bb(\ell^2 - \ell^\epsilon) &= \ell^2 a \\ b\ell^\epsilon &= b\ell^2 \end{aligned} \quad (17.22)$$

La soluzione è $b = 0$ e possiamo scegliere $a = 1$. L'altra equazione è

$$\begin{bmatrix} \ell^2 & B(\ell^2 - \ell^\epsilon) \\ 0 & \ell^\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \ell^\epsilon \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \quad (17.23)$$

da cui

$$\begin{aligned} \ell^2 c + Bd(\ell^2 - \ell^\epsilon) &= \ell^\epsilon c \\ d\ell^\epsilon &= d\ell^\epsilon \end{aligned} \quad (17.24)$$

da cui $c = -dB$, mentre ancora possiamo scegliere $d = 1$. Gli autostati sono allora

$$\begin{aligned} \ell^2 : \quad \underline{e}^{(1)} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \ell^\epsilon : \quad \underline{e}^{(2)} &= \begin{bmatrix} -B \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17.25)$$

Per $d > 4$ si ha $\epsilon < 0$ quindi si ha un accoppiamento rilevante ed uno irrilevante. Ancora al punto critico si ha che u_0 va a zero e quindi tutto succede come nel caso precedente e si ritrova la teoria di Landau con $\nu = 1/2$. Nello spazio dei parametri (u_0, r_0) un generico punto è dato da

$$\underline{K} = u_0 \underline{i} + r_0 \underline{j} \quad (17.26)$$

dove \underline{i} e \underline{j} sono i versori unitari in direzione di u_0 e r_0 rispettivamente. Nella base degli autostati $\underline{e}^{(1)}$ e $\underline{e}^{(2)}$ si ha

$$\underline{e}^{(1)} = \underline{j}, \quad \underline{e}^{(2)} = -B\underline{j} + \underline{i} \quad (17.27)$$

da cui

$$\underline{i} = \underline{e}^{(2)} + B\underline{e}^{(1)}, \quad \underline{j} = \underline{e}^{(1)} \quad (17.28)$$

Quindi il generico punto è dato da

$$\underline{K} = (r_0 + Bu_0)\underline{e}^{(1)} + u_0\underline{e}^{(2)} \quad (17.29)$$

La superficie critica è data dalla linea (vedi Fig. 17.1, dove abbiamo riportato anche la situazione dei flussi)

$$r_0 + Bu_0 = 0 \quad (17.30)$$

Per terminare osserviamo che segue dalla nostra analisi che un termine di interazione di tipo $u_n \phi^n$ dà luogo alla seguente trasformazione

$$u_n^{(\ell)} = \ell^{-(n-1)d} \ell^{n(1+d/2)} u_n = \ell^{-[n(d/2-1)-d]} \quad (17.31)$$

Gli accoppiamenti u_n risultano quindi irrilevanti per

$$n \left(\frac{d}{2} - 1 \right) > d \quad (17.32)$$

o

$$n > \frac{2d}{d-2} \quad (17.33)$$

Si vede facilmente che per $d > 4$ il secondo membro di questa disuguaglianza è decrescente e sempre minore di 4. Pertanto tutti i termini di interazione u_n sono irrilevanti per $n \geq 4$, se $d > 4$.

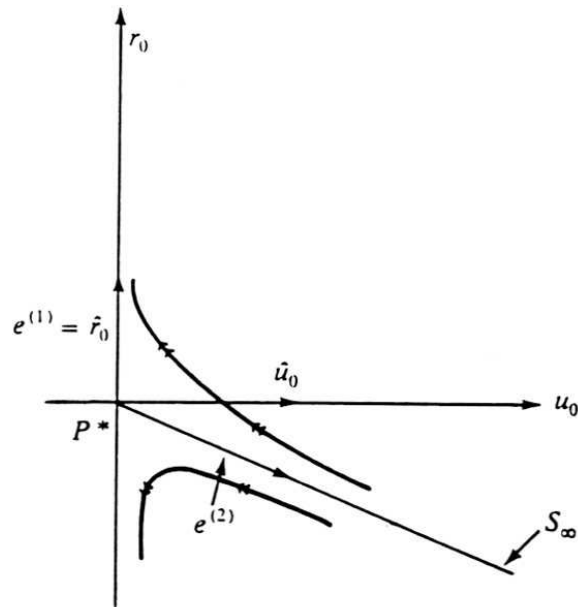


Fig. 17.1 Flow diagram for $D > 4$

XVIII. EQUAZIONI DEL GRUPPO DI RINORMALIZZAZIONE IN FORMA DIFFERENZIALE.

A volte è conveniente porre le equazioni del gruppo di rinormalizzazione in forma differenziale. Questo modo di presentazione è molto vicino a quanto abbiamo fatto nella parte del corso sulla teoria dei campi. Supponiamo al solito di aver effettuato una trasformazione del gruppo di rinormalizzazione tale da far passare dai blocchi di size a a blocchi di size ℓa . Successivamente creiamo dei blocchi di size $s\ell a$. Allora

$$[K_{s\ell}] = R_s[K_\ell] \quad (18.1)$$

Se adesso prendiamo s vicino ad 1, $s = 1 + \eta$, possiamo scrivere

$$[K_{(1+\eta)\ell}] - [K_\ell] = R_{1+\eta}[K_\ell] - [K_\ell] \quad (18.2)$$

Segue, dividendo ambo i membri per $\eta\ell$ e prendendo il limite per $\eta \rightarrow 0$

$$\frac{d[K_\ell]}{d\ell} = \frac{1}{\ell} \frac{dR_s[K_\ell]}{ds} \Big|_{s=1} \quad (18.3)$$

e definendo

$$B[K_\ell] = \frac{dR_s[K_\ell]}{ds} \Big|_{s=1} \quad (18.4)$$

si ottiene

$$\ell \frac{d[K_\ell]}{d\ell} = B[K_\ell] \quad (18.5)$$

od usando $\tau = \log \ell$

$$\frac{d[K_\tau]}{d\tau} = B[K_\tau] \quad (18.6)$$

In questa forma il punto fisso è definito dalla relazione

$$B[K^*] = 0 \quad (18.7)$$

È evidente la somiglianza formale con quanto fatto nel caso della teoria dei campi, dato che qui stiamo considerando l'evoluzione delle costanti di accoppiamento sotto uno scaling delle unità di lunghezza. L'utilità di queste equazioni è che possono essere integrate fino ad una regione in cui il sistema è molto fuori della criticalità (ricordiamo che sotto queste trasformazioni la lunghezza di correlazione si riduce). In queste condizioni si può sperare di calcolare le quantità di interesse tramite un'espansione perturbativa ed usare queste come punto di partenza per ritornare vicini al punto critico.

XIX. CALCOLO PERTURBATIVO DEGLI ESPONENTI CRITICI. ϵ -EXPANSION.

Come abbiamo visto in Sezione 9) il calcolo perturbativo della teoria di Landau-Ginzburg perde di significato per $d < 4$. Infatti il parametro di espansione risulta

$$\bar{u}_0 = u_0(r_0)^{(d-4)/2} = u_0(r_0)^{-\epsilon/2} \quad (19.1)$$

e questa espressione è divergente per $r_0 \rightarrow 0$ (cioè al punto critico), se $\epsilon > 0$ ($d < 4$). Possiamo però cercare di rileggere quanto stiamo facendo in termini della teoria di campo che abbiamo studiato nella prima parte del corso. In quel linguaggio l'hamiltoniana di Landau-Ginzburg $H = \beta L$ altro non è che l'azione euclidea in termini dei due accoppiamenti nudi u_0 e r_0 . In analogia a quanto abbiamo fatto in quel caso possiamo cercare di riesprimere la teoria in termini di parametri rinormalizzati opportunamente definiti. In particolare cercheremo di definire una costante di accoppiamento rinormalizzata che sia finita nel limite critico. I parametri rinormalizzati che useremo saranno la lunghezza di correlazione, o l'inverso della massa rinormalizzata, che sarà definita tramite una condizione di normalizzazione del tipo considerato nella equazione 31.4) della prima parte. Richiederemo cioè per la $\Gamma^{(2)}$

rinormalizzata la condizione

$$\Gamma^{(2)}(k) = |\vec{k}|^2 + \xi^{-2} + \mathcal{O}(|\vec{k}|^4), \quad \text{per } |\vec{k}|^2 \leq \xi^{-2} \quad (19.2)$$

Nel seguito porremo anche $m^2 = \xi^{-2}$. Consideriamo poi la funzione $\Gamma_0^{(4)}$, cioè la funzione a 4-punti 1PI relativa alla teoria nuda. Sceglieremo la condizione di rinormalizzazione per l'accoppiamento a impulsi nulli. Per capire come definire l'accoppiamento, cerchiamo di capire quale sia l'andamento di scaling delle $\Gamma_0^{(n)}$. Ricordiamo che queste sono definite dalle funzioni di Green connesse (Sezione 30 della prima parte) rimuovendo i propagatori relativi alle gambe esterne e fattorizzando la conservazione dell'impulso. Avremo allora che le dimensioni di scaling (in unità di lunghezza) delle funzioni di Green nude, connesse, sono date da

$$[G_{c,0}^{(n)}]_{\text{scaling}} = nd + nd_\phi \quad (19.3)$$

dove d_ϕ è la dimensione di scaling del campo ϕ_0 . Analogamente le dimensioni di scaling del propagatore sono

$$[D_0]_{\text{scaling}} = d + 2d_\phi \quad (19.4)$$

Le dimensioni di scaling delle funzioni 1PI sono allora

$$[\Gamma_0^{(n)}]_{\text{scaling}} + d = nd + nd_\phi - n(d + 2d_\phi) \quad (19.5)$$

da cui

$$[\Gamma_0^{(n)}]_{\text{scaling}} = -d - nd_\phi \quad (19.6)$$

Dato che si ha

$$d_\phi = 1 - \frac{d}{2} - \frac{\eta}{2} \quad (19.7)$$

si ottiene

$$[\Gamma_0^{(4)}]_{\text{scaling}} = d - 4 + 2\eta \quad (19.8)$$

Pertanto

$$\Gamma_0^{(4)} \sim \xi^{d-4+2\eta} \quad (19.9)$$

Abbiamo anche visto che il fattore responsabile della dimensione anomala di un campo è la rinormalizzazione di funzione d'onda, che ha l'andamento

$$Z_\phi \sim \xi^{-\eta} \quad (19.10)$$

(ricordiamo che $\phi_0 = Z_\phi^{1/2}\phi$ dove ϕ è il campo rinormalizzato). Se allora formiamo la combinazione

$$\xi^{4-d} Z_\phi^2 \Gamma_0^{(4)} \quad (19.11)$$

vediamo che al punto critico si ha

$$\xi^{4-d} Z_\phi^2 \Gamma_0^{(4)} \sim \xi^{4-d} \xi^{-2\eta} \xi^{d-4+2\eta} \rightarrow \text{costante} \quad (19.12)$$

Per le considerazioni che seguono è conveniente fare le seguenti identificazioni di accoppiamenti

$$\frac{\lambda_0}{4!} = \frac{u_0}{4}, \quad r_0 = m_0^2 \quad (19.13)$$

in modo da far coincidere formalmente l'hamiltoniana di Landau-Ginzburg come definita in equazione 9.6) con l'azione euclidea rinormalizzata per la teoria $\lambda\phi^4$, come definita in Sezione 23-29 della prima parte. Poniamo

$$\lambda = -\xi^{4-d} Z_\phi^2 \Gamma_0^{(4)} \Big|_{p_i=0} \quad (19.14)$$

od anche, dalla 30.3)

$$\lambda = -\xi^{4-d} \Gamma^{(4)} \Big|_{p_i=0} \quad (19.15)$$

dove la $\Gamma^{(4)}$ è la funzione rinormalizzata, cioè calcolata in termini di λ e m^2 . Vediamo che questa definizione di λ coincide con la definizione di costante d'accoppiamento rinormalizzata data in eq. 31.5) se facciamo l'identificazione

$$\mu = \xi^{-1} \quad (19.16)$$

Se adesso prendiamo il limite al punto critico avremo

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \lambda = \lambda^* \quad (19.17)$$

La relazione tra gli accoppiamenti nudi e rinormalizzati si trova facilmente calcolando le funzioni 1PI nude. Per esempio

$$\Gamma_0^{(4)} \Big|_{p_i=0} = -\lambda_0 + 3T_4 \Big|_{p_i=0} = - \left[\lambda_0 - \frac{3}{2} \lambda_0^2 \int_0^\Lambda \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(|\vec{k}|^2 + m_0^2)^2} \right] \quad (19.18)$$

dove abbiamo usato le stesse notazioni di Sezioni 28 e 29 della prima parte, ed abbiamo introdotto il cut-off Λ dovuto al coarse-graining. In questo modo saremo in grado di effettuare un calcolo perturbativo se il valore di punto fisso di λ^* è piccolo. L'idea di Wilson e

Fisher è stata quella di effettuare una doppia espansione in λ e in $\epsilon = 4 - d$. Infatti noi sappiamo che a $d > 4$ l'accoppiamento quartico è irrilevante e diventa marginale a $d = 4$. In particolare il punto fisso gaussiano diventa instabile in $d < 4$ perchè come abbiamo visto gli esponenti critici sono $y_1 = 2$ e $y_2 = \epsilon$. L'instabilità del punto fisso gaussiano deriva dal fatto che un nuovo punto fisso stabile nasce in $d < 4$ (punto fisso di Fisher-Wilson), verso il quale fluiscono ora gli accoppiamenti. Inoltre risulta che per $\epsilon \ll 1$ questo punto fisso è vicino al punto fisso gaussiano. Il successo della doppia espansione deriva dunque dalla vicinanza dei due punti fissi, perché questo assicura che λ^* è piccolo al punto di Fisher-Wilson giustificando quindi l'espansione perturbativa. Molto grossolanamente si può riconoscere la validità di questa idea ricordando dalla 17.17) che sotto una trasformazione del gruppo di rinormalizzazione si ha (u_0 e λ_0 sono la stessa cosa a parte un fattore numerico)

$$\lambda_0 \rightarrow \lambda_\ell = \ell^\epsilon \lambda_0 \quad (19.19)$$

e ponendo questa relazione in forma differenziale (vedi Sezione 19) si ha

$$\frac{d\lambda_s}{ds} = \epsilon \lambda_s \quad (19.20)$$

con $s = \log \ell$. La relazione precedente è corretta solo all'ordine più basso nella costante di accoppiamento. Ci possiamo aspettare termini correttivi del tipo

$$\frac{d\lambda_s}{ds} = \epsilon \lambda_s - A \lambda_s^2 + \mathcal{O}(\lambda_s^3) \quad (19.21)$$

con A dell'ordine di uno. Se $A < 0$ l'unico punto fisso consistente con $\lambda_0 > 0$ (ricorda 2.16)) è $\lambda_0^* = 0$. Se invece $A > 0$ si ha allora un ulteriore punto fisso

$$\lambda_0^* = \frac{\epsilon}{A} \quad (19.22)$$

Se questo è il caso, la ϵ -expansion garantisce la perturbatività della teoria nell'intorno di questo punto. Possiamo allora applicare tutta la tecnologia della prima parte. Là abbiamo visto come si dia senso alla teoria nuda tramite la separazione della lagrangiana rinormalizzata in due parti, una parte che contiene le costanti rinormalizzate e l'altra che contiene i controtermini. In questo caso non si hanno divergenze (ricordiamo che la teoria è qui definita con un cut-off intrinseco), ma questa separazione ci è utile proprio per connettere la teoria nuda con la teoria riespressa in termini di accoppiamenti rinormalizzati sulla quale possiamo effettivamente effettuare l'espansione perturbativa. Come abbiamo già detto, non

ha infatti senso l'espansione perturbativa in termini di λ_0 che diverge al punto critico, ma ne ha in termine di λ . Ciò che dobbiamo fare è di fare uso della condizione di rinormalizzazione (19.15), in congiunzione con l'espressione (19.17). In termini della scala μ la (19.14) si riscrive

$$\lambda = -\mu^{d-4} Z_\phi^2 \Gamma_0^{(4)} \Big|_{p_i=0} = -\mu^{d-4} \Gamma^{(4)} \Big|_{p_i=0} \quad (19.23)$$

Possiamo poi fare uso della (19.18) per invertire in modo perturbativo la relazione tra λ e λ_0 . A questo scopo è necessaria anche la conoscenza di Z_ϕ che si può ottenere calcolando le correzioni al propagatore nudo. Se ci limitiamo però a calcoli all'ordine di 1-loop, $Z_\phi = 1$, come abbiamo dimostrato a suo tempo. Quindi a 1-loop la dimensione anomala η risulta nulla. Ciò nondimeno in queste considerazioni di carattere generale continueremo a considerare anche Z_ϕ . Per determinare perturbativamente la relazione tra λ e λ_0 si pone

$$\lambda + \delta\lambda = \lambda_0 \mu^{d-4} Z_\phi^2 \quad (19.24)$$

(vedi eq. 29.22) della prima parte). Si determina poi $\delta\lambda$ dalla equazione (19.23)

$$\lambda = \mu^{d-4} Z_\phi^2 \left[(\lambda + \delta\lambda) \mu^{d-4} Z_\phi^{-2} - \frac{3}{2} (\mu^{d-4} Z_\phi^{-2})^2 \lambda^2 \int_0^\Lambda \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(|\vec{k}|^2 + m_2)^2} \right] \quad (19.25)$$

dove, dato che $\delta\lambda$ è almeno del secondo ordine in λ abbiamo trascurato i termini di ordine $\lambda\delta\lambda$ e abbiamo posto m^2 dentro l'integrale al posto di m_0^2 per la stessa ragione. Questa relazione fissa in modo univoco $\delta\lambda$ e riconosciamo facilmente che esso coincide con il parametro del controtermine in ϕ^4 introdotto in teoria dei campi. In effetti è chiaro che stiamo eseguendo lo stesso procedimento, fissiamo tramite le condizioni di rinormalizzazione le relazioni tra le costanti di accoppiamento nude e quelle rinormalizzate, queste condizioni vengono poi risolte in modo iterativo. La differenza è che nel caso della teoria dei campi la procedura si effettua in due passi, prima abbiamo fissato i controtermini in modo da eliminare le divergenze, poi ne abbiamo fissato le parti finite tramite le condizioni di rinormalizzazione. Questa separazione è in realtà fittizia ed è stata solo fatta per superare la difficoltà concettuale relativa alle divergenze. Ma in effetti i due passi possono essere sintetizzati dicendo semplicemente che i controtermini vengono determinati dalle condizioni di rinormalizzazione. Dunque siamo ora in grado di sfruttare tutta la tecnologia della rinormalizzazione in teoria dei campi. Sarà sufficiente identificare μ con ξ^{-1} . Osserviamo che avvicinarsi al punto critico corrisponde ad uno scaling verso grandi valori di ξ e analogamente corrisponderà a considerare piccoli valori di μ . In questo modo, fissati gli accoppiamenti nudi, possiamo, nella teoria rinormalizzata

seguire il flusso degli accoppiamenti. Le equazioni differenziali che regolano questi flussi sono esattamente le equazioni del gruppo di rinormalizzazione scritte in Sezione 32. Notiamo anche che effettuando una espansione nel numero delle dimensioni, gli integrali di Feynman risultano finiti e quindi possiamo mandare tranquillamente il cut-off Λ all' ∞ . Inoltre, dato che i controtermini hanno un termine di polo in ϵ , all'ordine leading possiamo ignorare tutti i termini finiti che contribuiscono ai controtermini. A quest'ordine è dunque come lavorare nello schema di Weinberg e t'Hooft. Ricordiamo allora che la funzione β è definita da

$$\beta(\lambda, \epsilon) = \mu \frac{d\lambda}{d\mu} \quad (19.26)$$

che adesso va letta più propriamente come

$$\beta(\lambda, \epsilon) = -\xi \frac{d\lambda}{d\xi} \quad (19.27)$$

Ricordando la 30.17) della parte I

$$\lambda_0 = \mu^\epsilon \left[\lambda + \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \right] + \mathcal{O}(\lambda^3) \quad (19.28)$$

(ricordiamo che qui abbiamo $\epsilon = 4 - d$) e ripetendo la derivazione della Sezione 31 si ha

$$\beta(\lambda, \epsilon) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} - \lambda\epsilon \quad (19.29)$$

I punti fissi della trasformazione di rinormalizzazione si ottengono dagli zeri della funzione β . Il punto $\lambda^* = 0$ è il punto fisso gaussiano. L'altro punto fisso (Fisher-Wilson) è invece

$$\lambda^* = \frac{16\pi^2}{3}\epsilon \quad (19.30)$$

che come, detto precedentemente, tende al punto fisso gaussiano per $\epsilon \rightarrow 0$ e che comunque è abbastanza vicino a zero per piccoli ϵ da poter giustificare un'espansione perturbativa. Intorno al punto fisso possiamo espandere la funzione β al primo ordine in $\lambda - \lambda^*$

$$\beta(\lambda, \epsilon) = \omega(\lambda - \lambda^*) \quad (19.31)$$

$$\omega = \left. \frac{d\beta}{d\lambda} \right|_{\lambda^*} \quad (19.32)$$

Integrando la 19.27)

$$\frac{d\xi}{\xi} = -\frac{d\lambda}{\omega(\lambda - \lambda^*)} \quad (19.33)$$

si ha

$$\frac{\xi_2}{\xi_1} = e^{-\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{1}{\omega} \frac{d\lambda}{\lambda - \lambda^*}} \quad (19.34)$$

da cui

$$\frac{\xi_2}{\xi_1} = \left(\frac{\lambda_2 - \lambda^*}{\lambda_1 - \lambda^*} \right)^{-1/\omega} \quad (19.35)$$

od anche

$$(\lambda_1 - \lambda^*) = (\lambda_2 - \lambda^*) \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} \right)^\omega \quad (19.36)$$

Notiamo che se λ_2 è più vicino alla criticità di λ_1 la lunghezza di correlazione ξ_2 è maggiore di ξ_1 . Interpretando ξ_2/ξ_1 come parametro della trasformazione del gruppo di rinormalizzazione ($\xi_2 = \ell \xi_1$, $\ell > 1$), la precedente espressione ci mostra che l'esponente critico y_2 (vedi Sezione 17) è dato da

$$y_2 = -\omega \quad (19.37)$$

Al punto fisso gaussiano

$$\omega = \left. \frac{d\beta}{d\lambda} \right|_{\lambda^*} = -\epsilon \quad (19.38)$$

da cui ritroviamo $y_2 = \epsilon$. Al punto fisso di Fisher-Wilson si ha invece

$$\omega = \frac{3\lambda^*}{8\pi^2} - \epsilon = +\epsilon \quad (19.39)$$

Pertanto per $d < 4$ si ha $\epsilon > 0$ e questo punto fisso risulta stabile (vedi Fig. 19.1)), o se si vuole l'accoppiamento corrispondente è irrilevante.

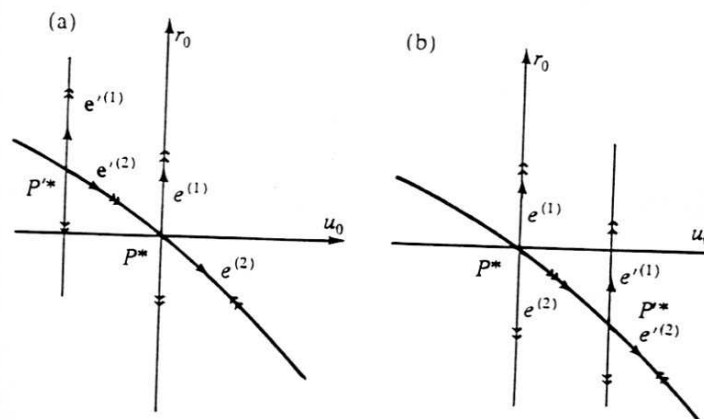


Fig. 19.1 Flow diagram for (a) $D > 4$ and (b) $D < 4$

Dalla 19.35) possiamo ricavare l'andamento della funzione di correlazione in vicinanza del punto fisso. Infatti

$$\xi_2 = \xi_1 \left(\frac{\lambda_2 - \lambda^*}{\lambda_1 - \lambda^*} \right)^{-1/\omega} \quad (19.40)$$

ovvero, in vicinanza del punto fisso

$$\xi \sim (\lambda - \lambda^*)^{-1/\omega} \quad (19.41)$$

Pertanto, per $d < 4$, al punto fisso gaussiano

$$\xi \sim (\lambda - \lambda^*)^{1/\epsilon} \quad (19.42)$$

che mostra come il punto fisso sia banale dato che $\xi \rightarrow 0$ per $\lambda \rightarrow \lambda^*$. Al punto fisso di Fisher-Wilson si ha invece

$$\xi \sim (\lambda - \lambda^*)^{-1/\epsilon} \quad (19.43)$$

che mostra come questo sia invece un punto fisso critico ($\xi \rightarrow \infty$ per $\lambda \rightarrow \lambda^*$).

Calcoliamo adesso il valore dell'esponente ν . A questo scopo riscriviamo la relazione tra massa nuda e massa rinormalizzata nella forma

$$m_0^2 = m^2 + \delta m^2 \equiv Z_m m^2 \quad (19.44)$$

E si ha dalla 30.18), parte I, (ricordare la diversa definizione di ϵ)

$$Z_m = 1 + \frac{\lambda}{16\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \quad (19.45)$$

Definiamo

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{Z_m} \xi \frac{dZ_m}{d\xi} = -\frac{1}{Z_m} \frac{dZ_m}{d\lambda} \beta(\lambda, \epsilon) \quad (19.46)$$

Si ottiene così

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon} \left(\frac{3\lambda^2}{16\pi^2} - \lambda \epsilon \right) = \frac{\lambda}{16\pi^2} + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (19.47)$$

In vicinanza di un punto fisso possiamo scrivere

$$\frac{1}{Z_m} \frac{dZ_m}{d\lambda} \sim -\frac{1}{\omega} \frac{\bar{\gamma}(\lambda^*)}{(\lambda - \lambda^*)} \quad (19.48)$$

da cui

$$Z_m(\lambda_1) = Z_m(\lambda_2) \left(\frac{\lambda_1 - \lambda^*}{\lambda_2 - \lambda^*} \right)^{-\bar{\gamma}(\lambda^*)/\omega} \quad (19.49)$$

Usando la 19.40) si ottiene

$$\frac{Z_m(\lambda_2)}{Z_m(\lambda_1)} = \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} \right)^{\bar{\gamma}(\lambda^*)} \quad (19.50)$$

Pertanto, ricordando che $m_0^2 \sim t$, dove t è la temperatura ridotta, e che $m^2 = \xi^{-2}$, segue da $m_0^2 = Z_m m^2$

$$t \sim \xi^{-2+\bar{\gamma}(\lambda^*)} \quad (19.51)$$

e ricordando la definizione di ν

$$\xi \sim t^{-\nu} \quad (19.52)$$

segue

$$\nu = \frac{1}{2 - \bar{\gamma}(\lambda^*)} \quad (19.53)$$

Pertanto, dato che al punto fisso critico

$$\bar{\gamma}(\lambda^*) = \frac{1}{16\pi^2} \lambda^* = \frac{1}{16\pi^2} \frac{16\pi^2}{3} \epsilon = \frac{\epsilon}{3} \quad (19.54)$$

da cui

$$\nu = \frac{1}{2 - \frac{\epsilon}{3}} \sim \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12} \quad (19.55)$$

Gli altri esponenti critici possono essere derivati dalle relazioni di scaling di Sezione 10), usando il precedente valore di ν e $\eta = 0$. Dalla relazione di Fisher si trova

$$\gamma = 2(\nu - \eta) = 1 + \frac{\epsilon}{6} \quad (19.56)$$

Dalla relazione di Josephson

$$\nu d = 2 - \alpha \longrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12} \right) (4 - \epsilon) = 2 - \alpha \quad (19.57)$$

e quindi

$$\alpha = \frac{\epsilon}{6} \quad (19.58)$$

Dalla relazione di Rushbrooke

$$2\beta = 2 - \alpha - \gamma \longrightarrow 2\beta = 2 - \frac{\epsilon}{6} - 1 - \frac{\epsilon}{6} \quad (19.59)$$

e quindi

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{6} \quad (19.60)$$

Infine dalla relazione di Widom

$$\delta = \frac{\gamma}{\beta} + 1 \longrightarrow \left(1 + \frac{\epsilon}{6}\right) \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{6}\right)} + 1 \quad (19.61)$$

si ha

$$\delta = 3 + \epsilon \quad (19.62)$$

Notiamo che per $\epsilon \rightarrow 0$ si ritrovano gli esponenti critici di campo medio. Inoltre possiamo avere una rozza stima del caso $d = 3$ ponendo $\epsilon = 1$. Vediamo dalla seguente tavola che le correzioni di questa espansione vanno infatti nella giusta direzione.

Esponente	$\epsilon - \text{exp.}$	Campo medio	Esperimento	Ising ($d = 3$)
α	0.167	0(disc.)	$0.110 \div 0.116$	0.110 ± 0.005
β	0.333	1/2	$0.316 \div 0.327$	0.325 ± 0.0015
γ	1.167	1	$1.23 \div 1.25$	1.2405 ± 0.0015
δ	4.0	3	$4.6 \div 4.9$	4.82 ± 0.04
ν	0.583	1/2	$0.615 \div 0.635$	0.630 ± 0.002
η	0	0	$0.016 \div 0.06$	0.032 ± 0.003

Appendice A: Relazione tra tracce nel discreto e nel continuo

Consideriamo una matrice continua $A(x, y)$ definita in un rettangolo $L \times L$. Supponiamo anche che la matrice sia invariante per traslazioni

$$A(x, y) = A(x - y) \quad (A1)$$

Per definire la traccia di questa matrice passiamo al discreto dividendo l'intervallo $(0, L)$ in N parti di ampiezza a , poniamo cioè

$$a = \frac{L}{N} \quad (A2)$$

La matrice A.1) può allora essere pensata come una matrice discreta

$$A_{jk} = A(x_j, x_k) \quad (A3)$$

con

$$x_j = ja = j \frac{L}{N} \quad (A4)$$

Assumeremo inoltre condizioni al contorno periodiche

$$A_{j+N,k} = A_{j,k+N} = A_{jk} \quad (\text{A5})$$

La matrice A_{jk} può essere facilmente diagonalizzata tramite una trasformazione di similitudine definita dalla matrice

$$U_{qnj} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{iq_n x_j} \quad (\text{A6})$$

con

$$q_n = \frac{2\pi}{L} n \quad (\text{A7})$$

La matrice U_{nj} è unitaria. Si ha infatti

$$U_{jq_n}^\dagger = U_{nj}^* = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-iq_n x_j} \quad (\text{A8})$$

da cui

$$(UU^\dagger)_{q_n q_m} = \frac{1}{N} \sum_j e^{iq_n x_j - q_m x_j} = \frac{1}{N} \sum_j e^{i2\pi(n-m)j/N} = \delta_{nm} \equiv \delta_{q_n q_m} \quad (\text{A9})$$

Mostriamo ora che la matrice U diagonalizza A . Si ha

$$\begin{aligned} A_{q_n q_m} &= \sum_{jk} U_{qnj} A_{jk} U_{qm k}^* = \frac{1}{N} \sum_{jk} e^{i(q_n x_j - q_m x_k)} A_{jk} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{jk} e^{-i(q_m - q_n)x_j} A_{jk} e^{iq_m(x_j - x_k)} \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

Le somme su j e k possono essere effettuate indipendentemente dato che A_{jk} dipende solo da $j - k$. Si ottiene

$$A_{q_n q_m} = \frac{1}{N} \sum_j e^{-i(q_m - q_n)x_j} \sum_k A_{jk} e^{iq_m(x_j - x_k)} = \delta_{q_n q_m} \sum_k A_{jk} e^{iq_m(x_j - x_k)} \quad (\text{A11})$$

La somma su k dipende solamente da q_m e ponendo

$$\sum_k A_{jk} e^{iq_m(x_j - x_k)} = \frac{1}{a} \hat{A}(q_m) \quad (\text{A12})$$

si trova

$$A_{q_n q_m} = \delta_{q_n q_m} \frac{1}{a} \hat{A}(q_m) \quad (\text{A13})$$

Dato che la traccia è invariante sotto trasformazioni di similitudine, si ha il risultato

$$\sum_i A_{ii} = \sum_n A_{q_n q_n} = \frac{1}{a} \sum_n \hat{A}(q_n) \quad (\text{A14})$$

Nel limite del continuo si ha

$$\sum_i a \rightarrow \int dx \quad (\text{A15})$$

mentre nello spazio di Fourier si ha da $q_n = 2\pi n/L$

$$\sum_n \frac{2\pi}{L} \rightarrow \int dq \quad (\text{A16})$$

La relazione di traccia diviene allora

$$\int dx A(x, x) = \frac{L}{2\pi} \int dq \hat{A}(q) \quad (\text{A17})$$