

Descrizione dell'attività di ricerca

1 Teoria di Yang-Mills in 1 + 1 dimensioni

Durante la tesi di laurea, mi sono occupato di proprietà di confinamento in teorie di gauge non abeliane tramite il calcolo del circuito di Wilson nella teoria di Yang-Mills in 1+1 dimensioni adottando la gauge di cono luce [1]. Ho così determinato il potenziale di interazione tra due quark statici. Adottando due diverse procedure di quantizzazione (causale e di cono-luce) ho ottenuto due tipi di interazioni non equivalenti. Sebbene entrambe diano luogo ad un potenziale confinante, la quantizzazione di cono-luce comporta un'interazione istantanea che, disaccoppiando i gradi di libertà gluonici, è equivalente ad una teoria abeliana banale. Nella quantizzazione causale, invece, la natura non abeliana della teoria sopravvive e dà luogo ad una teoria non equivalente alla precedente. Ho anche cominciato a studiare questo comportamento "patologico" considerando il circuito di Wilson in dimensione arbitraria $d + 1$. Ciò che avviene è che nel limite $d \rightarrow 1$ si ha una discontinuità che provoca un'anomalia nel caso in cui $d = 1$.

2 Fattorizzazione di alta energia e fattori d'impatto partonici

La mia attività dal dottorato di ricerca in poi si è spostata sull'analisi delle interazioni forti ad alte energie $s \gg Q^2$ (ove Q^2 rappresenta la scala dura del processo ed s il quadrato dell'energia nel centro di massa), la cui applicazione fenomenologica agli acceleratori è di primaria importanza. La caratteristica generale dei processi d'alta energia è che il grande rapporto $s/Q^2 \simeq 1/x$ (ove x è la variabile di Bjorken) entra nell'espansione perturbativa ad ogni ordine n nella forma $(\alpha_s \log 1/x)^n$. Questo richiede l'utilizzo di tecniche di risommazione per calcolare in modo affidabile le varie sezioni d'urto, poiché può accadere che $\alpha_s \log 1/x \sim 1$ anche qualora $\alpha_s \ll 1$.

Inizialmente mi sono occupato di stabilire la formula di fattorizzazione per processi di alta energia nella cosiddetta approssimazione next-to-leading $\log x$ (NLL), in cui oltre a venire risommati a tutti gli ordini perturbativi i termini dominanti $\mathcal{O}(\alpha_s^n \log^n 1/x)$, vengono risommati anche quelli sottodominanti $\mathcal{O}(\alpha_s^n \log^{n-1} 1/x)$.

La formula di fattorizzazione coinvolge tre fattori: due *fattori d'impatto* che descrivono le particelle che urtano e un fattore che descrive gli scambi di quanti (principalmente gluonici) tra le particelle esterne. Quest'ultimo fattore è la *funzione di Green* per scambio di gluoni nel canale di singoletto di colore.

Il mio primo contributo originale è stato la determinazione dei fattori d'impatto di quark e gluoni in approssimazione NLL [2]. Questo ha reso possibile la determinazione della funzione di Green, sempre in approssimazione NLL.

3 Risommazione collineare delle funzioni di Green e di splitting del gluone

Essendosi le correzioni NLL rivelate particolarmente grosse, lo sviluppo perturbativo che ne derivava è instabile. Si è quindi cercato di capire l'origine di tali grandi correzioni. Questo studio ha condotto ad identificare la causa delle grandi correzioni con i cosiddetti *contributi collineari*, in cui la catena di interazioni che collega le particelle

sottoposte all’urto è caratterizzata da un ordinamento forte nelle virtualità degli impulsi scambiati (regione collineare). Dal momento che questa è proprio la regione a cui si applicano le equazioni del gruppo di rinormalizzazione nella forma di Altarelli-Parisi, ho proposto di migliorare la formulazione della funzione di Green introducendo contributi a tutti gli ordini sottodominanti nella gerarchia dei $\log 1/x$, come è possibile predire — limitatamente alla regione collineare — dalle equazioni di Altarelli-Parisi [3].

Questa risommazione nella risommazione conduce ad un’equazione integrale la cui struttura è diversa da quella NLL pura, per cui si è posto il problema di trovare la soluzione di questa nuova equazione. In un lavoro successivo [4] ho proposto un metodo per la soluzione della nuova equazione integrale, che si basa sostanzialmente in uno sviluppo non più rispetto alla costante di accoppiamento α_s , bensì rispetto ad un nuovo parametro ω che altro non è che la variabile coniugata all’energia mediante trasformata di Mellin. L’espansione in ω si è rivelata essere molto più stabile della corrispondente espansione in α_s , e risulta essere quindi applicabile per analisi fenomenologiche. In particolare ho fornito stime dell’esponente di crescita della sezione d’urto e di quello della funzione di splitting del gluone con un’incertezza piuttosto contenuta, sia rispetto a variazioni della scala di rinormalizzazione che rispetto alle possibili scelte di schema di risommazione.

3.1 Modello collineare e “tunneling”

Per capire più in profondità le implicazioni della risommazione collineare, ho sviluppato un modello (chiamato “modello collineare”) che esibisce qualitativamente le stesse proprietà della funzione di Green migliorata ma che ha il notevole pregio di essere risolvibile, potendo essere ricondotto alla risoluzione di un’equazione di Schrödinger [5]. Dallo studio del modello collineare ho potuto verificare la bontà del metodo dell’espansione in ω precedentemente proposta rispetto alla soluzione esatta.

Sempre dallo studio del modello collineare, ho osservato con simulazioni numeriche che, al variare dell’energia, l’andamento della sezione d’urto presenta una brusca variazione. Nel regime di energie moderate, la sezione d’urto cresce con una legge a potenza il cui esponente di crescita è direttamente calcolabile dalla funzione autovalore dell’operatore integrale migliorato, che avevo già stimato quantitativamente.

Per energie superiori ad un certo valore critico, si ha un’improvvisa transizione in cui l’interazione è essenzialmente governata dalla dinamica non perturbativa della teoria. Questa transizione, denominata “tunneling”, non è mai stata ipotizzata precedentemente, e segnala che gli effetti dovuti alle correzioni di ordine superiore possono avere ripercussioni che alterano qualitativamente i processi di alta energia.

Il fenomeno del tunneling è stato confermato e dettagliatamente studiato anche nel caso reale, cioè nell’ambito della formulazione migliorata dalla risommazione collineare, in un lavoro successivo [7], in cui ho stimato la posizione della linea critica (nello spazio (s, Q^2)) a cui dovrebbe avvenire la transizione dal regime perturbativo a quello non perturbativo.

Un punto debole del modello collineare consiste nel trascurare contributi cosiddetti “higher twist” (HT), che sono soppressi come potenze inverse delle scale dure del processo (Q^2), ma che possono risorgere alle alte energie. Ho così proposto un secondo modello che tenesse in conto di contributi a twist maggiori [6]. Il primo risultato è stato

quello di mostrare come le correzioni HT siano di tipo additivo (e non moltiplicativo). Di conseguenza le violazioni della fattorizzazione sono uniformemente HT: ciò significa che, fissato un qualunque valore di x (in particolare arbitrariamente piccolo) i contributi HT sono soppressi di un fattore $1/Q^2$ per Q^2 sufficientemente elevato. In questo contesto ho stimato analiticamente lo spostamento delle singolarità della dimensione anomala del gluone (che governa le densità partoniche a piccoli x) e la variazione del relativo residuo provocate dai termini HT.

Infine ho applicato i metodi sviluppati nei modelli al caso reale in approssimazione di $\ln 1/x$ dominante [6], che contiene contributi HT a tutti gli ordini. Lo studio numerico della dimensione anomala del gluone ha dimostrato anche in questo caso che i contributi non perturbativi sono davvero HT: ne ho studiato la dipendenza al variare di alcuni parametri non perturbativi quali la regolarizzazione della costante di accoppiamento mobile $\alpha_s(k^2)$ necessaria per $k^2 \lesssim \Lambda_{\text{QCD}}^2$.

3.2 Sviluppo in β della funzione di Green

L'inclusione delle correzioni sottodominanti alla fattorizzazione di alta energia richiede l'uso della costante di accoppiamento mobile. Da un lato, nella regione infrarossa il regime di accoppiamento forte causa il fenomeno del tunneling sopra descritto. Dall'altro lato, nella regione perturbativa gli effetti dovuti all'evoluzione dell'accoppiamento apportano delle correzioni che sembrano violare il comportamento alla Regge della sezione d'urto. Ho mostrato [8] che il comportamento alla Regge non è violato nel regime di energie intermedie nel quale è applicabile la teoria delle perturbazioni, piuttosto gli effetti di accoppiamento mobile apportano correzioni importanti all'esponente di crescita della sezione d'urto. Per una valutazione quantitativa di questi effetti ho organizzato uno sviluppo delle quantità rilevanti in termini del parametro β_0 , il primo coefficiente della funzione beta che regola l'evoluzione dell'accoppiamento.

Un'implicazione importante dell'espansione in β_0 riguarda l'estensione del regime perturbativo. Infatti, il fenomeno del tunneling è verosimilmente ritardato da effetti di unitarietà (come, per esempio, scambi di Odderoni) di ordine formalmente sottodominante a quelli che stiamo considerando, ma essenziali ad energie asintotiche, e che hanno l'effetto di diminuire l'importanza dei contributi non perturbativi. Conseguentemente, ci si aspetta che il regime perturbativo si estenda in una regione sensibilmente più estesa a quella che appare nel nostro ambiente di lavoro. Dal momento che gli effetti non perturbativi sono soppressi con un andamento $\sim \exp(-1/\beta_0)$, l'espansione in β_0 ci fornisce un potente metodo d'indagine per studiare questa regione perturbativa più estesa ma precocemente mascherata dal tunneling.

La risoluzione numerica dell'equazione che definisce la funzione di Green migliorata tramite la risommazione collineare [13, 14], ha dimostrato non solo che il nostro approccio è applicabile ai valori di α_s tipici degli esperimenti presenti e futuri (al contrario dell'originale espansione in $\alpha_s \log 1/x$), ma che l'intervallo di energie entro il quale questo approccio è affidabile si estende in una regione molto più ampia di quanto non si potesse dedurre precedentemente. Ciò è collegato anche al fatto che la crescita della funzione di Green avviene ad energie maggiori di quanto fosse previsto senza risommazione collineare.

3.3 Funzione di splitting del gluone

La funzione di splitting del gluone che ne deriva presenta l'attesa crescita a piccoli x solo per valori di x molto piccoli $\sim 10^{-6}$, mentre a valori di x intermedi $\sim 10^{-3}$ essa assume addirittura valori inferiori ai calcoli ad ordine finito. Ho studiato quindi le caratteristiche di questa forma, ed in particolare di questo avvallamento a valori intermedi di x , motivandone semi-quantitativamente l'origine e l'entità [15].

4 Formulazione matriciale per partoni a piccoli x

Per ottenere una precisa descrizione delle densità partoniche a piccoli x , ho generalizzato le tecniche di risommazione descritte in precedenza al caso in cui siano presenti quark attivi. Ho proposto pertanto un'equazione di evoluzione per le densità non integrate di quark e gluoni, che generalizzano le equazioni di Altarelli-Parisi e di BFKL [18]. L'evoluzione matriciale è costruita in modo tale da soddisfare i vincoli imposti dal gruppo di rinormalizzazione per impulsi trasferiti fortemente ordinati, ed incorpora le note dimensioni anomale nello schema $\overline{\text{MS}}$ in approssimazione NLO, ed include l'informazione del kernel BFKL a livello NLL.

Ho quindi sviluppato un programma di calcolo numerico per risolvere l'equazione integrale così ottenuta, dal quale è possibile calcolare varie quantità di interesse fenomenologico, come le dimensioni anomale risommate e le funzioni di splitting risommate (in uno schema di risommazione consistente con quello $\overline{\text{MS}}$ per i primi due ordini perturbativi), dalle quali sarà possibile determinare le densità integrate di quark e gluoni.

Per rendere consistenti le densità partoniche risommate con i calcoli perturbativi fino al terz'ordine, ho effettuato uno studio dettagliato sulla relazione tra lo schema di fattorizzazione che viene usato in questo contesto risommato (che corrisponde ad una variante del cosiddetto schema di fattorizzazione Q_0) con lo schema usato negli sviluppi ad ordine finito (lo schema di fattorizzazione $\overline{\text{MS}}$). In pratica, ho determinato [16] il cambio di schema di fattorizzazione in approssimazione NLL per le dimensioni anomale γ_{gg} e γ_{qg} , e ne ho studiato alcune conseguenze fenomenologiche stimando l'impatto del cambio di schema sulla densità del gluone [17].

Dal momento che la trattazione analitica dello schema $\overline{\text{MS}}$ ad alte energie è piuttosto complicata ed ha richiesto in alcuni casi l'uso di sviluppi ed approssimazioni, ho ideato un modello di studio [20] che presenta le principali caratteristiche qualitative dell'equazione di evoluzione del gluone, e che ammette una determinazione esatta ed analitica delle soluzioni per le densità integrate e non integrate nei due schemi $\overline{\text{MS}}$ e Q_0 . In questo modo ho chiarito la struttura di alcune rappresentazioni analitiche, e ho verificato la correttezza dei risultati ottenuti nel precedente lavoro sulla vera QCD.

Attualmente sono impegnato nel fornire una rappresentazione semi-analitica delle funzioni di splitting risommate, che possa essere usata con facilità e rapidità dai programmi di evoluzione per le densità partoniche e di fit ai dati, in modo da migliorare la precisione di tali densità a piccoli x , per poter così predire con migliore accuratezza le sezioni d'urto ad alta energia che ci si aspettano agli acceleratori, secondo il modello standard.

5 Correzioni di unitarietà: l'Odderone

In questa linea di ricerca, il punto centrale è quello dell'unitarizzazione della QCD a grandi energie. In pratica, nell'approccio perturbativo, la classe di diagrammi di Feynman che fornisce i contributi dominanti per $s \gg Q^2$, prevede una crescita a potenza in s della sezione d'urto, in contrasto con il limite imposto dall'unitarietà della matrice S . Per ottenere una descrizione soddisfacente, che preservi la condizione di unitarietà, è necessario prendere in considerazione altre classi di diagrammi che contengano lo scambio nel canale t di un numero arbitrario di gluoni reggeizzati. Come primo passo oltre il sistema a 2 gluoni, ha recentemente rivestito particolare interesse il sistema a 3 gluoni con $C = 1, P = -1$ (Odderone), sia per l'interesse teorico nella comprensione della dinamica di stati ad n gluoni con $n > 2$, sia per l'interesse fenomenologico che l'Odderone riveste, per esempio per la reazione $\gamma^* \rightarrow \eta_c$.

Riprendendo l'equazione integrale dell'Odderone e, sfruttando le proprietà di invarianza conforme e separabilità olomorfa, ho riformulato il problema diminuendo considerevolmente le variabili di integrazione nell'equazione, portando alla luce simmetrie globali alle quali la soluzione generale deve soddisfare. Quindi, ho calcolato numericamente la sezione d'urto $\gamma^* \rightarrow \eta_c$ [9].

6 Fattori di impatto fotonici e vertici di produzione di jet

Lo scopo ultimo di tutto questo lavoro è arrivare ad una comprensione dei meccanismi della QCD ad alte energie che permettano di descrivere quantitativamente ciò che si osserva ai collisori adronici. Per arrivare ad una consistente descrizione fenomenologica, è necessario avere a disposizione anche i fattori d'impatto a livello NLL delle particelle esterne.

I fattori d'impatto partonici sono stati importanti per impostare lo schema di fattorizzazione, ma non sono utilizzabili fenomenologicamente. In pratica, le particelle che vengono fatte scontrare negli acceleratori possono essere o fotoni (prodotti dagli elettroni del fascio) oppure adroni, in cui si vuole osservare un jet nello stato finale per avere la scala dura che giustifichi l'uso della teoria perturbativa.

Questo mi ha condotto al calcolo dei fattori d'impatto fotonici [10] ed anche a quello dei fattori d'impatto adronici con produzione di jet nello stato finale [11, 12], che ho impostato e completato. Ciò permette, in combinazione con la determinazione della funzione di Green del gluone di cui mi sono occupato, di avere risultati quantitativi delle sezioni d'urto per diffusione di fotoni virtuali (come si può osservare a LEP, TESLA), per eventi di forward jet (HERA) che coinvolgono sia un fotone virtuale che un adrone che produce un jet, sia per eventi a due jet ai collisori adronici (TEVATRON, LHC).

In particolare, ho effettuato la predizione per la sezione d'urto differenziale e le correlazioni azimutali per la produzione dei cosiddetti "jet di Mueller-Navelet" ad LHC, per l'energia di progetto di 14 TeV [22]. Successivamente ho mostrato come il calcolo dei vertici di jet nell'approssimazione di piccola apertura angolare, effettuato da un altro gruppo di ricerca, non fosse compatibile con gli algoritmi di jet correntemente usati in fenomenologia, ed ho fornito le versioni corrette per gli algoritmi di "cono" e "kT" [25].

Attualmente sto lavorando al calcolo teorico delle sezioni d'urto di produzione di due jet separati da un grosso intervallo di rapidità, in approssimazione logaritmica sottodominante.

7 Urto di stringhe ad energie trans-planckiane

Per studiare l'eventuale formazione di buchi neri dall'urto di due stringhe ad energie trans-planckiane e avere indicazioni sul paradosso dell'informazione nel collasso gravitazionale, ho ripreso le equazioni di azione ridotta introdotte da Amati, Ciafaloni e Veneziano, ed ho mostrato che la matrice S del collasso gravitazionale è correlata ad un'ampiezza di tunneling per un sistema di meccanica quantistica in uno spazio ad un grado di libertà [19]. Questa corrispondenza permette di capire il ruolo delle soluzioni di campo sia reali che complesse, l'assorbimento del canale elastico dovuto alla produzione di stati a molti gravitoni, ed il ruolo del parametro d'impatto critico come valore di transizione da un regime in cui l'urto elastico delle stringhe è permesso, ad un regime in cui quest'urto è sempre più soppresso.

In questo contesto ho mostrato come le soluzioni semiclassiche del suddetto modello unidimensionale, interpretate come perturbazioni alla metrica di Minkowski, implicino una metrica curva consistente con le note soluzioni di urti tra particelle a massa nulla in relatività generale, con in più correzioni quantistiche. In particolare ho mostrato come le traiettorie delle particelle in esame siano deflesse, e le leggi orarie presentino dei ritardi temporali durante il processo d'urto [24].

Ho quindi introdotto nel summenzionato modello unidimensionale un meccanismo di produzione di gravitoni, e ne ho studiato le proprietà di unitarietà [21]. Ho mostrato come non sia possibile in questo modello ottenere una matrice- S unitaria, a meno di allargare lo spazio delle fasi dei gravitoni emessi in regioni non fisicamente realizzabili, oppure di ammettere soluzioni singolari ultraviolette, regolarizzate infine dalla dinamica delle stringhe, ma al di là del controllo del nostro modello semiclassico [23].

Per studiare in modo più rigoroso la produzione di gravitoni negli urti ad energie trans-planckiane, ho determinato l'ampiezza di produzione di gravitoni da parte di particelle quantistiche che descrive accuratamente sia la regione di gravitoni soffici, sia quella di gravitoni prodotti nella cosiddetta "cinematica multi-Regge". Queste rappresentano le regioni più rilevanti dello spazio delle fasi. Risommando le ampiezze di produzione a tutti gli ordini perturbativi nell'approssimazione iconale dominante, ho determinato lo spettro di emissione di gravitoni in funzione dell'energia delle particelle incidenti e del loro parametro d'impatto. Questo spettro presenta come frequenza caratteristica l'inverso del raggio gravitazionale classico, in analogia alla radiazione di Hawking che diventa sempre più "soffice" quanto maggiore è l'energia totale del sistema [26]. Includendo anche le "reinterazioni" dei gravitoni emessi con le particelle incidenti, ho potuto precisare la forma e le distribuzioni azimutali di tale spettro, ottenendo anche importanti relazioni tra i campi coinvolti nella radiazione ed i coefficienti trasversi della metrica interagente [27], il tutto all'interno di una descrizione in cui la matrice- S complessiva è esplicitamente unitaria.

Includendo nei processi di interazione ed emissione anche i contributi sottodominanti all'approssimazione iconale, ho potuto calcolare lo spettro della radiazione gravitazionale anche nella regione di forte accoppiamento, nella quale il parametro di impatto

diventa dell'ordine del raggio gravitazionale. In questo regime, si osserva un notevole incremento della radiazione, in particolare in vicinanza del parametro di impatto critico sotto il quale la matrice- S elastica è assorbita. Tenendo in conto anche della conservazione dell'energia, abbiamo trovato un notevole risultato: lo spettro della radiazione gravitazionale è esponenzialmente soppresso a grandi frequenze dei gravitoni, proprio come accade alla radiazione termica, e la "temperatura efficace" che noi troviamo è dello stesso ordine della radiazione di Hawking per un buco nero con massa pari all'energia del centro di massa del sistema. Ma nel nostro caso, lo stato finale rimane uno stato quantistico "puro", nel quale l'informazione non viene persa [28].

Attualmente sto cercando di estendere questi calcoli agli urti centrali (parametro di impatto zero) e di interpretare la caratteristica quasi-termica del nostro spettro, per stabilire se negli urti che consideriamo ci sia o meno la reale produzione di un buco nero [29].

Riferimenti bibliografici

- [1] A. Bassetto, D. Colferai and G. Nardelli, **q \bar{q} interaction in light-cone gauge formulations of Yang-Mills theory in 1 + 1 dimensions**, *Nucl. Phys. B* **501** (1997) 227 [[hep-th/9706019](#)] and Erratum, *Nucl. Phys. B* **507** (1997) 746;
- [2] M. Ciafaloni and D. Colferai, **k -factorization and impact factors at next-to-leading level**, *Nucl. Phys. B* **538** (1999) 187 [[hep-ph/9806350](#)];
- [3] M. Ciafaloni and D. Colferai, **The BFKL equation at next-to-leading level and beyond**, *Phys. Lett. B* **52** (1999) 372 [[hep-ph/9812366](#)];
- [4] M. Ciafaloni, D. Colferai and G.P. Salam, **Renormalization Group Improved Small- x Equation**, *Phys. Rev. D* **60** (1999) 114036-1, [[hep-ph/9905566](#)];
- [5] M. Ciafaloni, D. Colferai and G.P. Salam, **A collinear model for small- x physics**, *JHEP* **9910** (1999) 017, [[hep-ph/9907409](#)];
- [6] M. Ciafaloni, D. Colferai and G.P. Salam, **On factorisation at small- x** , *JHEP* **0007** (2000) 054 [[hep-ph/0007240](#)];
- [7] M. Ciafaloni, D. Colferai, G.P. Salam and A.M. Stasto, **Tunneling transition to the Pomeron regime**, *Phys. Lett. B* **541** (2002) 314 [[hep-ph/0204287](#)];
- [8] M. Ciafaloni, D. Colferai, G.P. Salam and A.M. Stasto, **Expanding running coupling effects in the hard Pomeron**, *Phys. Rev. D* **66** (2002) 054014 [[hep-ph/0204282](#)];
- [9] J. Bartels, M.A. Braun, D. Colferai and G.P. Vacca, **Diffraction η_c photo-and electroproduction with the perturbative QCD Odderon**, *Eur. Phys. J. C* **20** (2001) 323 [[hep-ph/0102221](#)];
- [10] J. Bartels, D. Colferai, S. Gieseke and A. Kyrieleis, **NLO Corrections to the Photon Impact Factor: Combining Real and Virtual Corrections**, *Phys. Rev. D* **66** (2002) 094017 [[hep-ph/0208130](#)];

- [11] J. Bartels, D. Colferai and G.P. Vacca, **The NLO Jet Vertex for Mueller-Navelet and Forward Jets: the Quark Part**, *Eur. Phys. J. C* **24** (2002) 83 [hep-ph/0112283];
- [12] J. Bartels, D. Colferai and G.P. Vacca, **The NLO Jet Vertex for Mueller-Navelet and Forward Jets: the Gluon Part** *Eur. Phys. J. C* **29** (2003) 235, [hep-ph/0206290].
- [13] M. Ciafaloni, D. Colferai, G.P. Salam and A.M. Stasto, **Extending QCD perturbation theory to higher energies**, *Phys. Lett. B* **576** (2003) 143, [hep-ph/0305254].
- [14] M. Ciafaloni, D. Colferai, G.P. Salam and A.M. Stasto, **Renormalisation group improved small- x Green's function**, *Phys. Rev. D* **68** (2003) 114003, [hep-ph/0307188].
- [15] M. Ciafaloni, D. Colferai, G.P. Salam and A.M. Stasto, **The gluon splitting function at moderately small- x** , *Phys. Lett. B* **587** (2004) 87, [hep-ph/0311325].
- [16] M. Ciafaloni and D. Colferai, **Dimensional regularisation and factorisation schemes in the BFKL equation at subleading level**, *JHEP* **09** (2005) 079, [hep-ph/0507106].
- [17] M. Ciafaloni, D. Colferai, G.P. Salam and A.M. Stasto, **Minimal subtraction vs. physical factorisation schemes in small- x QCD**, *Phys. Lett. B* **635** (2006) 320, [hep-ph/0601200].
- [18] M. Ciafaloni, D. Colferai, G. P. Salam and A. M. Stasto, **A matrix formulation for small- x singlet evolution**, *JHEP* **0708** (2007) 046, [hep-ph/07071453].
- [19] M. Ciafaloni and D. Colferai, **S-matrix and quantum tunneling in gravitational collapse**, *JHEP* **0811** (2008) 047, [hep-th/0807.2117].
- [20] D. Colferai, **A solvable model for small- x physics in $D > 4$ dimensions**, *JHEP* **0804** (2008) 103, [hep-ph/0712.3124].
- [21] M. Ciafaloni and D. Colferai, **Quantum Tunneling and Unitarity Features of an S-matrix for Gravitational Collapse**, *JHEP* **12** (2009) 062, [hep-th/0909.4523].
- [22] D. Colferai, F. Schwennsen, L. Szymanowski and S. Wallon, **Mueller Navelet jets at LHC - complete NLL BFKL calculation**, *JHEP* **1012** (2010) 026 [arXiv:1002.1365 [hep-ph]].
- [23] M. Ciafaloni, D. Colferai and G. Falcioni, **Unitarity alternatives in the reduced-action model for gravitational collapse**, *JHEP* **1109** (2011) 044 [arXiv:1106.5628 [hep-th]].

- [24] M. Ciafaloni and D. Colferai, **Rescattering corrections and self-consistent metric in Planckian scattering**, *JHEP* **1410** (2014) 85 [arXiv:1406.6540 [hep-th]].
- [25] D. Colferai and A. Niccoli, **The NLO jet vertex in the small-cone approximation for kt and cone algorithms**, *JHEP* **1504** (2015) 071 [arXiv:1501.07442 [hep-ph]].
- [26] M. Ciafaloni, D. Colferai and G. Veneziano, **Emerging Hawking-Like Radiation from Gravitational Bremsstrahlung Beyond the Planck Scale**, *Phys. Rev. Lett.* **115** (2015) 17,171301 [arXiv:1505.06619 [hep-th]].
- [27] M. Ciafaloni, D. Colferai, F. Coradeschi and G. Veneziano, **Unified limiting form of graviton radiation at extreme energies**, *Phys. Rev. D* **93** (2016) 044052, [arXiv:1512.00281 [hep-th]].
- [28] M. Ciafaloni and D. Colferai, **Radiation enhancement and temperature in the collapse regime of gravitational scattering**, *Phys. Rev. D* **95** (2017) 086003, [arXiv:1612.06923 [hep-th]].
- [29] M. Ciafaloni and D. Colferai, **Unitarity restoring graviton radiation in the collapse regime of gravitational scattering**, *Phys. Rev. D* **96** (2017) 126008, [arXiv:1709.08405 [hep-th]].