

Le congetture di Razumov–Stroganov e il modello
a sei vertici

Vanni Noferini

21 febbraio 2008

Indice

Introduzione e sommario	1
1 La catena di <i>spin</i> di Heisenberg	4
1.1 La catena di <i>spin</i> nella fisica moderna e contemporanea	4
1.2 Definizione della catena di <i>spin</i> $\frac{1}{2}$	5
1.3 La catena XXZ	7
1.4 Casi particolari	8
1.5 Interpretazione come gas di reticolo	9
1.6 Il metodo dello <i>scattering</i> inverso quantistico	10
1.7 Integrazione della catena XXZ	16
1.8 Lo stato fondamentale	20
1.8.1 $\Delta \geq 1$	21
1.8.2 $\Delta < 1$	21
2 Le matrici a segno alterno	23
2.1 Definizione	23
2.2 Conteggi delle matrici a segno alterno	24
3 Le congetture di Razumov–Stroganov	27
4 Il modello a sei vertici	31
4.1 Definizione	31
4.2 Sistemi fisici modellizzati dal sei vertici	34

4.2.1	Ghiaccio	35
4.2.2	KDP	35
4.2.3	Materiali antiferroelettrici	36
4.3	Soluzione del modello a sei vertici con condizioni al contorno toroidali	36
4.4	Fasi del modello a sei vertici con condizioni al contorno toroidali . .	40
4.4.1	Settore I: $\Delta < -1$	40
4.4.2	Settore II: $ \Delta < 1$	41
4.4.3	Settori IIIa e III b : $\Delta > 1$	42
4.5	Transizioni di fase per condizioni toroidali	42
4.5.1	Transizione III \rightarrow II	43
4.5.2	Transizione I \rightarrow II	43
5	Le condizioni al contorno a parete di dominio	44
5.1	Definizione	44
5.2	Separazione delle fasi	46
5.3	Modello a sei vertici e matrici a segno alterno	48
5.4	Modello a sei vertici e catena XXZ	50
6	Considerazioni sulle congetture di Razumov–Stroganov	56
6.1	Motivazioni dello studio	56
6.2	Considerazioni preliminari	57
6.3	Correlatori di bordo e funzioni generatrici	59
6.4	Prima congettura	60
6.5	Autostati e prodotti scalari	62
6.6	Seconda congettura	67
6.7	Terza congettura	71
6.8	Terza congettura e funzioni \hbar	74
6.9	Simmetrie della funzione di partizione nel limite omogeneo	77
6.10	Terza congettura e dualità $(a, b) \leftrightarrow (a, -b)$	78

<i>INDICE</i>	iii
6.11 Considerazioni conclusive	81
A Notazione usata per i prodotti tensoriali	82
B Relazione fra gli operatori B e C	84
C Risultati generali sulle equazioni di Bethe e sui polinomi di Baxter–Stroganov	86
C.1 Le equazioni di Bethe	86
C.2 I polinomi di Baxter–Stroganov	89
D Sulle funzioni \hbar	91
D.1 Calcolo esplicito delle funzioni \hbar	91
D.2 Sull’equazione (6.31)	93
E Sul numero di vertici di tipo a e di tipo b	97
F La misura di Giauque e Stout dell’entropia residua dell’acqua	99

Introduzione e sommario

Scopo di questo lavoro di tesi è lo studio delle congetture di Razumov–Stroganov sullo stato fondamentale della catena di Heisenberg XXZ di *spin* $\frac{1}{2}$ con parametro di anisotropia $\Delta = -\frac{1}{2}$ e numero di siti dispari.

Si tratta di un problema sottoposto all’attenzione della comunità scientifica nel 2000, e che da allora suscita notevole interesse nel settore dei sistemi integrabili.

Nella struttura della tesi possono essere identificate tre parti: la prima parte (Capitoli 1–4) è una presentazione dei modelli e delle strutture di cui il nostro studio si occupa; la seconda parte (Capitoli 5–6) riporta le idee, le tecniche ed i risultati della parte di ricerca originale del lavoro di tesi; la terza parte è costituita dalle Appendici, in cui abbiamo inserito anche alcune dimostrazioni inedite e alcuni calcoli parte del lavoro originale ma che, a nostro giudizio, avrebbero eccessivamente appesantito la lettura se inserite nel corpo principale.

Il Capitolo 1 è dedicato al modello di Heisenberg per il magnetismo; dopo un breve inquadramento generale, ci specializziamo al caso unidimensionale di *spin* $\frac{1}{2}$, con particolare attenzione per la catena XXZ. Introduciamo inoltre la tecnica dello *scattering* inverso quantistico, ed in particolare il *Bethe Ansatz algebrico* che utilizzeremo nella parte originale del lavoro.

Nel Capitolo 2 spostiamo il nostro sguardo sulla matematica combinatoria, presentando i più significativi risultati noti sulle matrici a segno alterno (ASM), le

coprotagoniste del lavoro di Razumov e Stroganov.

Siamo quindi pronti per esporre, nel Capitolo 3, le congetture di Razumov–Stroganov, molte delle quali tuttora indimostrate, che hanno ispirato il presente lavoro.

L'idea portante della nostra indagine teorica è l'utilizzo di un modello bidimensionale esattamente risolubile di fisica statistica classica, il modello a sei vertici, come anello di connessione fra catena XXZ e ASM. Nel Capitolo 4 riassumiamo i risultati più classici, quelli per condizioni al contorno periodiche, presenti nella ricchissima letteratura disponibile su questo modello.

La seconda parte inizia con il Capitolo 5, nel quale dopo avere introdotto particolari condizioni al contorno dette "a parete di dominio" (DWBC), illustriamo le motivazioni per cui il modello a sei vertici con DWBC è connesso con entrambi gli oggetti - un modello fisico e una struttura matematica - su cui vertono le eguaglianze congetturate da Razumov e Stroganov.

Nel Capitolo 6, infine, presentiamo nel dettaglio le nostre idee ed i risultati ottenuti. In particolare, abbiamo ottenuto una giustificazione alternativa del valore dell'energia dello stato di Razumov–Stroganov (prima congettura) e abbiamo ricavato interessanti riformulazioni della seconda e della terza, che riteniamo costituire un promettente progresso per una futura dimostrazione. Nel corso della nostra esplorazione abbiamo inoltre dimostrato alcune formule inedite sulle funzioni di partizione e sui correlatori del modello a sei vertici con DWBC e in assenza di campo esterno.

L'Appendice A costituisce un *vademecum* per le notazioni utilizzate in tutta la tesi sui prodotti tensoriali; l'Appendice B e l'Appendice E riportano due nostre dimostrazioni, necessarie per giustificare alcuni dei nostri risultati; in Appendice C riportiamo risultati generali sulle equazioni di Bethe e i polinomi di

Baxter–Stroganov, fra cui alcune dimostrazioni originali; nell’Appendice D si trovano calcoli espliciti su una delle nostre formule sulla terza congettura di Razumov–Stroganov; l’Appendice F approfondisce le motivazioni teoriche e sperimentali all’origine del modello a sei vertici e riassume una celebre misura dell’entropia residua del ghiaccio.

Nelle formule abbiamo sempre posto la costante di Planck ridotta \hbar e la costante di Boltzmann k_B uguali a 1.

Capitolo 1

La catena di *spin* di Heisenberg

1.1 La catena di *spin* nella fisica moderna e contemporanea

Il modello di Heisenberg per il ferromagnetismo è stato introdotto originariamente in [1].

Nella sua forma più generale questo modello è descritto dall'Hamiltoniana

$$H = \sum_{\langle j,k \rangle} J_{jk,x} S_j^x S_k^x + J_{jk,y} S_j^y S_k^y + J_{jk,z} S_j^z S_k^z + h \sum_j S_j^z. \quad (1.1)$$

Gli \vec{S} sono operatori di *spin* che occupano un sito reticolare ciascuno e h è un campo magnetico esterno; la prima sommatoria va intesa sui siti primi vicini. In generale, il reticolo si sviluppa in tre dimensioni spaziali.

Nel caso unidimensionale si parla di *catena di spin*. La catena di *spin* di Heisenberg ha una particolare rilevanza storica per la fisica teorica dei modelli integrabili perché è stato il primo modello a venire risolto con la tecnica nota come *Bethe Ansatz*; in particolare nel 1931 Hans Bethe trovò la soluzione esatta per la catena isotropica di *spin* $\frac{1}{2}$ in assenza di campo magnetico esterno (in [2]).

Dal punto di vista teorico, la letteratura sul modello di Heisenberg in generale

e sul caso di catene in una dimensione in particolare è estremamente vasta (si veda ad esempio la rassegna [3]). Oltre alle soluzioni esatte ottenute con la tecnica del *Bethe Ansatz*, che analizzeremo nelle sezioni successive, menzioniamo brevemente fra gli altri possibili approcci quelli di teoria di campo (come il modello sigma non lineare o le teorie di campo conformi), gli approcci perturbativi e quelli numerici (come il metodo Monte Carlo quantistico).

Dal punto di vista sperimentale gli studi sulle catene di *spin* sono realizzati su materiali, sia naturali che artificiali, in cui l'accoppiamento magnetico è molto forte lungo una direzione spaziale e trascurabile lungo le altre. I primi passi in questa direzione sono avvenuti negli anni Settanta del secolo scorso con lo studio mediante tecniche di *scattering* inelastico di neutroni del tetrametilammonio-manganese-tricloride (TMMC, [4]). Più recentemente gli studi sperimentali di materiali magnetici quasi-unidimensionali si sono concentrati principalmente su composti contenenti ioni Cu^{++} , che realizzano catene di *spin* $\frac{1}{2}$, e su composti contenenti ioni Ni^{++} che realizzano invece catene di *spin* 1. Per un elenco più approfondito dei materiali e delle relative caratteristiche si rimanda a [5].

In questo lavoro di tesi siamo interessati alla catena di *spin* $\frac{1}{2}$ in assenza di campo magnetico, e nel seguito ci specializzeremo a questo caso.

1.2 Definizione della catena di *spin* $\frac{1}{2}$

Consideriamo una catena di *spin* $\frac{1}{2}$, ciascuno dei quali occupa uno degli M siti di un reticolo unidimensionale, in assenza di campo magnetico.

Prendiamo in esame lo spazio di Hilbert locale di *spin* h_n , relativo all' n -esimo sito reticolare. Questo spazio è isomorfo a \mathbb{C}^2 e su di esso agisce l'operatore locale di *spin* \vec{S}_n .

Se scegliamo la base in cui S_n^z è diagonale ($S_n^z |\uparrow_n\rangle = \frac{1}{2} |\uparrow_n\rangle$, $S_n^z |\downarrow_n\rangle = -\frac{1}{2} |\downarrow_n\rangle$), ed in particolare se adottiamo la rappresentazione in cui $|\uparrow_n\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\downarrow_n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, allora le componenti dell'operatore locale di *spin* sono proporzionali alle matrici di

Pauli: $\vec{S}_n = \frac{\vec{\sigma}_n}{2}$, con

$$\sigma_n^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_n^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_n^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Operatori di *spin* associati a siti differenti commutano, cosicché le relazioni di commutazione sono:

$$[\sigma_j^\alpha, \sigma_k^\beta] = 2i\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\delta_{jk}\sigma_j^\gamma$$

dove $\alpha, \beta, \gamma = x, y, z$ e $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$ è il tensore completamente antisimmetrico rispetto allo scambio di due dei suoi indici con $\epsilon^{xyz} = 1$.

L'interazione avviene fra primi vicini e nel caso più generale è descritta dall'Hamiltoniana:

$$H = - \sum_{n=1}^M (J_x \sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + J_y \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y + J_z \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z) \quad (1.2)$$

con J_x, J_y e J_z numeri reali.

L'Hamiltoniana (1.2) è un operatore quantistico che agisce sullo spazio di Hilbert \mathcal{H} , isomorfo a \mathbb{C}^{2^M} , prodotto tensoriale degli spazi locali di *spin*:

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{n=1}^M h_n, \quad H : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}. \quad (1.3)$$

Generalmente si considerano condizioni al contorno periodiche ($\vec{\sigma}_{M+1} = \vec{\sigma}_1$), anche se in letteratura non mancano analisi del modello con diverse condizioni al contorno (si veda ad esempio [6])

Quando le tre costanti sono tutte diverse il modello prende il nome di *catena XYZ*; gli importanti casi particolari $J_x = J_y \neq J_z$ e $J_x = J_y = J_z$ sono noti rispettivamente come *catena XXZ* e *catena XXX*, mentre il caso $J_z = 0$ si chiama *catena XY*.

1.3 La catena XXZ

Il caso $J_x = J_y = J$ è di particolare interesse in questo lavoro di tesi. Per analizzarlo è utile definire il parametro di anisotropia $\Delta = J_z/J$.

Il valore assoluto di J può essere ignorato a meno di riscalare opportunamente l'unità di misura dell'energia, mentre il suo segno determina, fissato il valore di Δ , la descrizione di una catena ferromagnetica (J e Δ concordi in segno) o antiferromagnetica (J e Δ discordi). Possiamo dunque porre senza perdere in generalità $J = 1$.

Con queste prescrizioni l'Hamiltoniana (1.2) diventa:

$$\begin{aligned} H &= - \sum_{n=1}^M (\sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y + \Delta \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z) \\ &= - \sum_{n=1}^M (2(\sigma_n^+ \sigma_{n+1}^- + \sigma_n^- \sigma_{n+1}^+) + \Delta \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z) \quad (1.4) \end{aligned}$$

dove si sono introdotti gli operatori $\sigma_n^\pm = \frac{1}{2}(\sigma_n^x \pm i\sigma_n^y)$.

La forma estremamente semplice della Hamiltoniana (1.4) suggerisce alcune considerazioni preliminari basate sulle simmetrie del modello. In particolare vi sono alcuni operatori che commutano con l'Hamiltoniana e che dunque corrispondono a numeri quantici utili ad etichettare gli autostati del sistema.

La magnetizzazione totale è definita come la terza componente dello *spin* totale:

$$S^z = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M \sigma_n^z.$$

Poiché $[H, S^z] = 0$ gli autostati dell'Hamiltoniana sono anche autostati della magnetizzazione; gli autovalori di S^z sono $s^z = -\frac{M}{2}, -\frac{M}{2} + 1, -\frac{M}{2} + 2, \dots, +\frac{M}{2}$.

Inoltre l'Hamiltoniana è invariante per riflessione rispetto al piano xy , ovvero

$[H, R] = 0$ dove R è l'operatore di riflessione

$$R = \prod_{n=1}^M \sigma_n^x$$

Pertanto lo spettro di H è simmetrico in s^z .

Infine nel caso di condizioni al contorno periodiche si ha invarianza per traslazione di un sito, ovvero sotto l'azione dell'operatore di traslazione unitaria¹

$$\mathcal{T} = \prod_{n=1}^{\overleftarrow{M-1}} \frac{(1 + \vec{\sigma}_n \cdot \vec{\sigma}_{n+1})}{2}.$$

Detto t l'autovalore di \mathcal{T} , si definisce il momento totale P dello stato quantico del sistema tramite la relazione $t = e^{iP}$. Poiché $\mathcal{T}^M = 1$ si ha che $t = e^{\frac{2\pi i j}{M}}$ e dunque $P = \frac{2j\pi}{M}$, con $j = \frac{1-M}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{M-1}{2}$ per M dispari e $j = 1 - \frac{M}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{M}{2}$ per M pari.

Fissato un valore di s^z , e dunque il corrispondente sottospazio di \mathcal{H} , è possibile (almeno in linea di principio: le dimensioni di \mathcal{H} crescono esponenzialmente al crescere di M ...) calcolare autovalori ed autovettori di quel settore, e quindi in particolare individuare lo stato fondamentale.

Per M e Δ generici il problema non è banale; rimandiamo alla sezione 1.8 per ulteriori considerazioni.

1.4 Casi particolari

Al variare del parametro Δ l'Hamiltoniana (1.4) della catena XXZ può descrivere modelli fisici diversi.

Ad esempio per $\Delta = 0$ il modello prende il nome di *catena XX0*; i limiti $\Delta \rightarrow \pm\infty$ corrispondono al *ferromagnete (antiferromagnete) di Ising*. Per il valore

¹Con il simbolo $\overleftarrow{\prod} \dots$ abbiamo indicato il prodotto ordinato.

$\Delta = 1$ il modello si chiama *ferromagnete di Heisenberg* ed ha la peculiarità di essere invariante per rotazioni: in questo caso particolare $[H, S^2] = 0$ dove $\vec{S} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M \vec{\sigma}_n$ è lo *spin* totale. Detto $s(s+1)$ l'autovalore di S^2 , gli autostati compaiono necessariamente in multipletti di *spin* di degenerazione $2s+1$.

Se il numero di siti è pari² è possibile distinguere fra siti pari e siti dispari del reticolo; si può considerare la trasformazione che ruota i soli *spin* dei siti dispari di un angolo di π intorno all'asse z , lasciando viceversa immutati gli *spin* dei siti pari: questa trasformazione porta $H(\Delta)$ in $-H(-\Delta)$ mettendo così in relazione diretta le catene con $J = 1$ e Δ negativi con le catene con $J = -1$ e Δ positivi.

In particolare $\Delta = -1$ è equivalente all'*antiferromagnete di Heisenberg*, ed anche in questo caso si ha invarianza per rotazioni come per il ferromagnete di Heisenberg. Alcuni autori chiamano la catena XXZ *modello di Heisenberg-Ising* proprio perché, al variare del parametro Δ nella regione $|\Delta| > 1$, può descrivere comportamenti intermedi tra il magnete isotropo di Heisenberg e il magnete fortemente anisotropo di Ising.

Infine, completa il campo delle fasi del modello la regione di maggiore interesse per questo lavoro di tesi, ovvero quella in cui $|\Delta| < 1$, che descrive un paramagnete.

1.5 Interpretazione come gas di reticolo

L'Hamiltoniana (1.4) non è interpretabile unicamente come quella di una catena di *spin*; esiste una descrizione alternativa del sistema come gas di reticolo di bosoni impenetrabili (*hard-core bosons*). Daremo qua un breve cenno a questa visione rimandando a [6] per i dettagli.

Ciascuna particella nell'interpretazione dell'Hamiltoniana come gas di reticolo corrisponde ad uno *spin down* nell'interpretazione come catena di *spin*, mentre a

²Una relazione analoga vale anche per un numero dispari di siti, purché però non si considerino condizioni al contorno periodiche, bensì le cosiddette condizioni al contorno antiperiodiche: $\vec{\sigma}_n = -\vec{\sigma}_{n+M}$. Si vedano [6] e la sezione 1.8 per ulteriori approfondimenti sulle differenze fra reticolo con numero di siti pari e dispari.

ogni *spin up* corrisponde un posto vuoto nel reticolo.

Si introduce l'operatore numero $\hat{n}_j = (1 - \sigma_j^z)/2$, i cui autovalori 1 e 0 corrispondono rispettivamente alla presenza e all'assenza di una particella nel j -esimo sito reticolare.

Il numero totale di particelle è l'autovalore dell'operatore

$$\hat{N} = \sum_{j=1}^M \hat{n}_j,$$

che commuta con l'Hamiltoniana.

L'Hamiltoniana (1.4) si può riscrivere nel seguente modo:

$$H = - \sum_{j=1}^M (2(\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+) + 4\Delta \hat{n}_j \hat{n}_{j+1}) + 4\Delta \hat{N} - M\Delta. \quad (1.5)$$

In questa interpretazione, i primi due termini nella sommatoria descrivono una energia cinetica per *salto fra siti primi vicini* di una particella verso siti vuoti; il terzo termine nella sommatoria invece è un potenziale di interazione a coppia fra primi vicini, con energia potenziale -4Δ . Il termine $4\Delta \hat{N}$ può venire assorbito nel potenziale chimico μ , mentre il termine $-M\Delta$ è una costante irrilevante.

1.6 Il metodo dello *scattering* inverso quantistico

La catena XXZ fa parte di un'ampia classe di modelli integrabili tramite un metodo noto come *scattering inverso quantistico* (QISM, acronimo dell'inglese *Quantum Inverse Scattering Method*, [7]), che consente di ritrovare i risultati dell'originale *Bethe Ansatz* e di procedere oltre.

Il nome si riferisce alla quantizzazione del metodo dello *scattering* inverso, collegato al problema della conoscenza di un potenziale a partire dalla matrice di

scattering (si vedano [8], [9]).

L'oggetto fondamentale in questo metodo è l'operatore di Lax associato all' n -esimo sito del reticolo. Questo operatore agisce sullo spazio di Hilbert $h_n \otimes V$, prodotto tensoriale dello spazio "quantistico" (lo spazio locale di *spin* h_n) per uno spazio ausiliario V , isomorfo anch'esso a \mathbb{C}^2 .

Per la catena XXZ ad esempio si ha:

$$L(n | \lambda) = \sin(\lambda + \eta \sigma_n^z \sigma_v^z) + \sin(2\eta) (\sigma_n^+ \sigma_v^- + \sigma_n^- \sigma_v^+) = \begin{pmatrix} \sin(\lambda + \eta \sigma_n^z) & \sin(2\eta) \sigma_n^- \\ \sin(2\eta) \sigma_n^+ & \sin(\lambda - \eta \sigma_n^z) \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

dove le σ_n agiscono su h_n mentre le σ_v agiscono su V . Nella seconda scrittura si è esplicitamente rappresentato l'operatore L come una matrice 2×2 agente su V (i quattro elementi di tale matrice sono operatori agenti sullo spazio quantistico locale di *spin* h_n).

Il parametro η è detto *parametro di crossing* ed è associato al parametro di anisotropia Δ tramite la relazione³

$$\Delta = \cos(2\eta)$$

mentre λ è detto parametro spettrale e il suo significato sarà chiarito nel seguito.

In generale, affinché gli operatori di Lax siano utili alla risoluzione di un modello integrabile devono soddisfare due proprietà:

$$[L(m | \lambda)_{ab}, L(n | \mu)_{cd}] = 0 \quad \forall m, n | m \neq n \quad (1.7)$$

$$\tilde{R}(\lambda, \mu) (L(n | \lambda) \otimes L(n | \mu)) = (L(n | \mu) \otimes L(n | \lambda)) \tilde{R}(\lambda, \mu) \quad (1.8)$$

dove $\tilde{R} = \Pi R$ (essendo Π la matrice di permutazione definita in Appendice A), i prodotti tensoriali devono intendersi fra i due spazi ausiliari degli operatori di Lax

³In generale il parametro η può assumere valori complessi. Rimandiamo alla sezione 4.4 per ulteriori dettagli.

(cioè $L(n) \otimes L(n) : V \otimes V \otimes h_n \rightarrow V \otimes V \otimes h_n$) ed R è una matrice agente su $V \otimes V$ (quindi nel caso della catena di Heisenberg XXZ, in cui $\dim V = 2$, è una matrice 4×4).

La (1.7) è detta *relazione di ultralocalità*: i pedici etichettano i quattro elementi-operatori di L .

Perché una matrice possa fungere da matrice R per qualche modello integrabile deve soddisfare l'**equazione di Yang–Baxter**:

$$(1 \otimes \tilde{R}(\lambda, \mu))(\tilde{R}(\lambda, \nu) \otimes 1)(1 \otimes \tilde{R}(\mu, \nu)) = (\tilde{R}(\mu, \nu) \otimes 1)(1 \otimes \tilde{R}(\lambda, \nu))(\tilde{R}(\lambda, \mu) \otimes 1) \quad (1.9)$$

dove 1 è l'identità di $GL(V \otimes V)$.

L'importante equazione (1.9) compare oltre che in fisica matematica anche in altri settori, ad esempio nella teoria dei nodi e delle trecce. Il suo significato fisico nell'ambito del QISM è collegato alla nozione di *scattering non diffrattivo* (si veda [6]). Consideriamo gli stati di *scattering* di un sistema quantistico a molti corpi. Se supponiamo che l'interazione derivi esclusivamente da una successione di urti a due corpi (e dunque che i momenti dello stato finale siano semplici riarrangiamenti dei momenti dello stato iniziale: è questo l'originale *coordinate Bethe Ansatz*) allora il sistema si dice *non diffrattivo* e la matrice di *scattering* complessiva può essere fattorizzata come prodotto di matrici di *scattering* a due corpi: questa condizione costituisce, per la classe di sistemi fisici in considerazione, un'estensione della nozione classica di integrabilità. È cruciale la dimensionalità del sistema: ad eccezione dei casi banali (come le particelle libere), non sono noti sistemi non diffrattivi in più di una dimensione spaziale.

L'equazione di Yang–Baxter corrisponde alla condizione di autoconsistenza di questa richiesta. Infatti la sequenza di urti a due corpi che consente di ottenere un certo stato finale non è univocamente determinata: l'equazione (1.9) esprime l'indipendenza dalla particolare scelta di una di tali sequenze. Si veda anche la Fi-

gura 1, che può essere letta come la rappresentazione grafica dell'equazione (1.9). La matrice \tilde{R} svolge il ruolo di matrice di *scattering* a due corpi, e i parametri spettrali vengono interpretati come le rapidità associate ai momenti di singola particella; nella Figura 1 abbiamo rappresentato due diverse successioni di urti a due corpi che generano lo stesso stato finale, individuato dalla permutazione $(k(\lambda), k(\mu), k(\nu))$ dei momenti delle singole particelle, a partire dallo stesso stato iniziale $(k(\nu), k(\mu), k(\lambda))$.

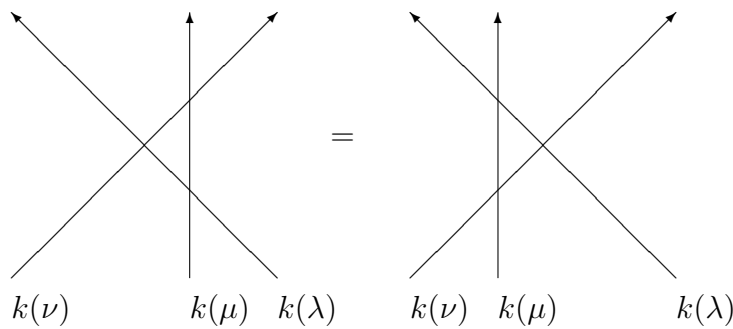


Figura 1

L'equazione (1.9) definisce la matrice R a meno di una funzione scalare ϕ . Infatti se R è soluzione della (1.9), è immediato verificare che anche ϕR lo è.

Alla catena XXZ, in particolare, è associata la cosiddetta matrice R trigonometrica:

$$R_{XXZ}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} f_{xxz}(\mu, \lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & g_{xxz}(\mu, \lambda) & 0 \\ 0 & g_{xxz}(\mu, \lambda) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{xxz}(\mu, \lambda) \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

con

$$f_{xxz}(\mu, \lambda) := \frac{\sin(\lambda - \mu + 2\eta)}{\sin(\lambda - \mu)} \quad g_{xxz}(\mu, \lambda) := \frac{\sin(2\eta)}{\sin(\lambda - \mu)} \quad (1.11)$$

È semplice, benché laborioso, verificare che la (1.10) con le (1.11) è soluzione dell'equazione di Yang–Baxter (1.9).

L'idea alla base del QISM è di costruire un operatore dipendente dal parametro

spettrale, che sia diagonalizzabile algoritmicamente e i cui autovettori siano anche autovettori dell'Hamiltoniana. Questo operatore prende il nome di matrice di trasferimento τ .

Per costruire la matrice di trasferimento si definisce dapprima la matrice di monodromia

$$T(\lambda) = \prod_{n=1}^{\overleftarrow{M}} L(n | \lambda) = L(M | \lambda)L(M-1 | \lambda) \dots L(2 | \lambda)L(1 | \lambda) \quad (1.12)$$

dove i prodotti si intendono fra gli operatori di Lax visti come matrici di 2×2 agenti sullo spazio ausiliario V (si veda l'Appendice A).

$T(\lambda)$ può essere a sua volta scritta in forma di matrice:

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Ciascuno degli elementi della matrice di monodromia è un operatore quantistico che agisce sullo spazio di Hilbert \mathcal{H} (1.3).

La matrice di trasferimento è la traccia di T sullo spazio ausiliario:

$$\tau(\lambda) = \text{Tr}(T(\lambda)) = A(\lambda) + D(\lambda) \quad (1.13)$$

Si dimostra che le proprietà (1.7),(1.8) implicano (si veda [7])

$$\tilde{R}(\lambda, \mu)(T(\lambda) \otimes T(\mu)) = (T(\mu) \otimes T(\lambda))\tilde{R}(\lambda, \mu), \quad (1.14)$$

dove i prodotti tensoriali sono ancora da intendersi fra i due spazi ausiliari V ($T \otimes T : V \otimes V \otimes \mathcal{H} \rightarrow V \otimes V \otimes \mathcal{H}$)

Moltiplicando a sinistra la (1.14) per Π (si veda l'Appendice A per le definizioni

dei prodotti fra matrici e le proprietà di Π) si ottiene l'equazione:

$$R(\lambda, \mu)(T(\lambda) \otimes 1)(1 \otimes T(\mu))(R(\lambda, \mu))^{-1} = (1 \otimes T(\mu))(T(\lambda) \otimes 1) \quad (1.15)$$

Calcolando la traccia dei due membri della precedente eguaglianza si ottiene (Appendice A)

$$[\tau(\lambda), \tau(\mu)] = 0, \quad (1.16)$$

da cui usando la (1.18):

$$[H, \tau(\lambda)] = 0. \quad (1.17)$$

La matrice di trasferimento genera le costanti del moto del sistema. Al variare del parametro spettrale si ha infatti un'infinità di operatori che commutano con l'Hamiltoniana: tutte le quantità conservate possono venire espresse in termini dalla matrice τ .

Nella massima generalità, con il metodo del QISM si costruisce una matrice di trasferimento in modo tale che l'Hamiltoniana possa essere espressa come combinazione lineare delle sue derivate logaritmiche calcolate in opportuni punti ν_b [7]:

$$H = \sum_{a,b} c_{ab} \frac{d^a}{d\lambda^a} \ln(\tau(\lambda)) \Big|_{\lambda=\nu_b} \quad (1.18)$$

In particolare per la catena XXZ l'Hamiltoniana è esprimibile in termini della derivata prima di $\ln(\tau(\lambda))$ calcolata in un punto ν tale che $L(\nu) = C\Pi$, con C costante.

Si può facilmente verificare che per la Hamiltoniana (1.4) questa condizione è soddisfatta da $\nu = \eta$, con $C = \sin(2\eta)$. L'equazione (1.18) diventa:

$$H_{XXZ} = -2 \sin(2\eta) \frac{d}{d\lambda} \ln(\tau(\lambda)) \Big|_{\lambda=\eta} + M \cos(2\eta). \quad (1.19)$$

Per quanto riguarda l'operatore di traslazione unitaria \mathcal{T} , che genera l'impulso

totale, la relazione che lo lega alla matrice di trasferimento è:

$$\mathcal{T} \sin^M(2\eta) = \tau(\lambda) \Big|_{\lambda=\eta}. \quad (1.20)$$

1.7 Integrazione della catena XXZ

Uno dei punti fondamentali del QISM è il cosiddetto *Bethe Ansatz algebrico*, un algoritmo per ottenere autovalori ed autovettori di un dato modello integrabile. In questa sezione analizzeremo questa tecnica specializzandoci in particolare alla catena XXZ.

Lo schema risolutivo del *Bethe Ansatz* algebrico parte dal cosiddetto "stato di vuoto" $|0\rangle$, definito dall'azione su di esso degli elementi della matrice di trasferimento.

$$C(\lambda)|0\rangle = 0, \quad A(\lambda)|0\rangle = a(\lambda)|0\rangle, \quad D(\lambda)|0\rangle = d(\lambda)|0\rangle \quad \forall \lambda \quad (1.21)$$

Ricordando la definizione (1.6) dell'operatore di Lax $L(n)$ associato all' n -esimo sito reticolare, se consideriamo nello spazio locale di *spin* il vettore $|\uparrow_n\rangle$, tale che $\sigma_n^+|\uparrow_n\rangle = 0$, è immediato verificare che per la catena XXZ

$$|0\rangle = |\uparrow\rangle = \otimes_{n=1}^M |\uparrow_n\rangle, \quad a(\lambda) = \sin^M(\lambda + \eta), \quad d(\lambda) = \sin^M(\lambda - \eta). \quad (1.22)$$

Il risultato fondamentale del *Bethe Ansatz* algebrico è il seguente

Teorema 1 *Fissato un intero m , $0 \leq m \leq M$, lo stato*

$$|\Omega_m(\{\lambda_j\})\rangle = \left(\prod_{j=1}^m B(\lambda_j) \right) |0\rangle$$

è un autostato della matrice di trasferimento $\tau(\lambda)$

$$\tau(\lambda)|\Omega_m(\{\lambda_j\})\rangle = \theta(\lambda, \{\lambda_j\})|\Omega_m(\{\lambda_j\})\rangle$$

se e solo se l'insieme di numeri complessi $\{\lambda_j\}$, tale che $\lambda_a = \lambda_b \Leftrightarrow a = b$, soddisfa il sistema di **equazioni di Bethe**:

$$\frac{a(\lambda_j)}{d(\lambda_j)} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{f(\lambda_j, \lambda_k)}{f(\lambda_k, \lambda_j)} = 1 \quad j = 1, \dots, m \quad (1.23)$$

L'autovalore corrispondente è:

$$\theta(\lambda, \{\lambda_k\}) = a(\lambda) \prod_{j=1}^m f(\lambda, \lambda_j) + d(\lambda) \prod_{j=1}^m f(\lambda_j, \lambda) \quad (1.24)$$

Per la dimostrazione si rimanda a [7]. Qua sottolineiamo che la condizione che le radici $\{\lambda_j\}$ siano tutte diverse garantisce che il sistema di equazioni (1.23) ammetta soluzione. Questo risultato è noto in letteratura come *principio di Pauli per i bosoni interagenti in una dimensione*.

Nel caso in esame della catena XXZ, le funzioni f sono proprio le f_{xxz} definite nella (1.11); usando anche le (1.22), le equazioni (1.23) diventano:

$$\left(\frac{\sin(\lambda_j + \eta)}{\sin(\lambda_j - \eta)} \right)^M = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{\sin(\lambda_k - \lambda_j - 2\eta)}{\sin(\lambda_k - \lambda_j + 2\eta)} \quad j = 1, \dots, m \quad (1.25)$$

Introduciamo i momenti p_j delle quasiparticelle associate agli operatori $B(\lambda_j)$, che per la catena XXZ sono così definiti:

$$p_j = i \ln \frac{\sin(\lambda_j - \eta)}{\sin(\lambda_j + \eta)}. \quad (1.26)$$

Le (1.25) si possono scrivere in una forma più attraente:

$$e^{iMp_j} = (-1)^{m-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \left(\frac{e^{ip_j}}{e^{ip_k}} \cdot \frac{e^{ip_k} + e^{-ip_j} - 2\Delta}{e^{ip_j} + e^{-ip_k} - 2\Delta} \right) \quad j = 1, \dots, m \quad (1.27)$$

Con le equazioni (1.27) abbiamo ritrovato il risultato dell'originale *Bethe Ansatz*.

Prendendone il logaritmo si trova:

$$p_j = \frac{2\pi I_j}{M} + \sum_{k=1}^m \phi(j, k), \quad (1.28)$$

dove si è definita

$$\phi(j, k) = \ln \left(\frac{e^{i(p_j+p_k)} + 1 - 2\Delta e^{ip_k}}{e^{i(p_j+p_k)} + 1 - 2\Delta e^{ip_j}} \right).$$

Poiché $\phi(j, k) = -\phi(k, j) \Rightarrow \phi(j, j) = 0$ si è incluso anche il termine $k = j$ nella sommatoria senza compromettere la correttezza dell'equazione.

I numeri quantici I_j identificano lo stato quantico del sistema, e sono interi per m dispari o seminteri dispari per m pari. Fissati M ed m , vi sono $\binom{M}{m}$ possibili scelte indipendenti per gli I_j . Sommando su tutte le possibili scelte di m si ottengono dunque tutti i 2^M autostati.

Richiamiamo la relazione (1.19) fra l'Hamiltoniana e la matrice di trasferimento.

Ne possiamo dedurre che l'autovalore dell'energia è dato da:

$$\epsilon(\{\lambda_j\}) = M \cos(2\eta) - 2 \sin(2\eta) \frac{\theta'(\lambda)}{\theta(\lambda)} \Big|_{\lambda=\eta}. \quad (1.29)$$

D'altro canto

$$\theta(\lambda) = a(\lambda)b(\lambda) + c(\lambda)d(\lambda), \quad (1.30)$$

dove abbiamo introdotto le notazioni

$$b(\lambda) := \prod_{j=1}^m \frac{\sin(\lambda_j - \lambda + 2\eta)}{\sin(\lambda_j - \lambda)}, \quad c(\lambda) := \prod_{j=1}^m \frac{\sin(\lambda - \lambda_j + 2\eta)}{\sin(\lambda - \lambda_j)}.$$

Poiché $d(\eta) = d'(\eta) = 0$, si ha che

$$\left. \frac{\theta'(\lambda)}{\theta(\lambda)} \right|_{\lambda=\eta} = \frac{a'(\eta)b(\eta) + a(\eta)b'(\eta)}{a(\eta)b(\eta)} = \frac{M}{\tan(2\eta)} + \Psi_\eta, \quad (1.31)$$

dove $\Psi_\eta = \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{\tan(\lambda_j - \eta)} - \frac{1}{\tan(\lambda_j + \eta)} \right)$.

Quindi la (1.29) si può così riscrivere:

$$\epsilon(\{\lambda_j\}) = M\Delta - 2\sin(2\eta) \left(\frac{M}{\tan(2\eta)} + \Psi_\eta \right) = -M\Delta - 8\sin^2(\eta) \sum_{j=1}^m \Omega_j, \quad (1.32)$$

dove $\Omega_j = \frac{1 + \tan^2(\lambda_j)}{\tan^2(\lambda_j) - \tan^2(\eta)}$.

È particolarmente elegante l'espressione dell'energia in funzione degli impulsi introdotti con la (1.26): infatti si verifica che $2\sin^2(\eta)\Omega_j = \cos(p_j) - \Delta$, e di conseguenza

$$\epsilon(\{\lambda_j\}) = -M\Delta + 4 \sum_{j=1}^m (\Delta - \cos(p_j)) = (4m - M)\Delta - 4 \sum_{j=1}^m \cos(p_j). \quad (1.33)$$

Per quanto concerne il momento totale, dall'equazione (1.20) si evince che l'autovalore t della matrice di traslazione unitaria \mathcal{T} è $t = e^{iP} = \frac{\theta(\eta)}{\sin^M(2\eta)}$, e pertanto l'impulso totale P è

$$P = -i \ln \frac{\theta(\eta)}{\sin^M(2\eta)} = \sum_{j=1}^m p_j. \quad (1.34)$$

Risulta ora evidente l'interpretazione fisica degli operatori $B(\lambda_j)$ come operatori di creazione di quasiparticelle di momento p_j , oppure di particelle fisiche se si assume l'interpretazione del sistema come gas di reticolo.

Quindi è chiaro perché deve essere $0 \leq m \leq M$. Inoltre a causa della simmetria per inversione dall'asse z è sufficiente limitarsi a studiare i casi $m \leq \lfloor \frac{M}{2} \rfloor$.

Notiamo che, poiché

$$\sum_{j,k=1}^m \phi(j, k) = 0,$$

le (1.28) implicano che

$$\sum_{j=1}^m p_j = \frac{2\pi I_{TOT}}{M}$$

con I_{TOT} intero, coerentemente con le considerazioni fatte nella sezione 1.3.

Concludiamo questa sezione dando anche l'autovalore della magnetizzazione:

$$s^z = \frac{M}{2} - m.$$

1.8 Lo stato fondamentale

In linea di principio il *Bethe Ansatz* algebrico fornisce un metodo algoritmico per la costruzione di autovettori e autovalori dell'Hamiltoniana (1.4) a partire dall'insieme delle radici di Bethe, soluzioni delle (1.25).

In particolare è di grande interesse la conoscenza dell'autostato fondamentale al variare di Δ . È la struttura dello stato fondamentale che, nel limite $M \rightarrow \infty$, determina la fisica allo zero assoluto.

Purtroppo però in generale le radici di Bethe non sono esplicitamente note. Riferendoci alla forma (1.28) delle equazioni di Bethe, ci possiamo aspettare che nello stato fondamentale gli I_j siano scelti in modo da risultare massimalmente compatti e distribuiti simmetricamente intorno all'origine (dunque $P = 0$), ma l'espressione per i p_j non è data in forma esplicita per Δ, M, m generici.

1.8.1 $\Delta \geq 1$

Nel settore $\Delta \geq 1$ è immediato provare che lo stato fondamentale è quello che corrisponde ai due sottospazi unidimensionali caratterizzati da $s^z = \pm \frac{M}{2}$ e che l'autoenergia minima è lineare in Δ e in M .

Infatti, sia $e_0(s_z)$ il più piccolo autovalore dell'energia nel settore in considerazione, e sia E_0 l'energia dello stato fondamentale. Ovviamente $E_0 \leq e_0(\pm \frac{M}{2}) = -M\Delta$. Se però $\Delta \geq 1$ vale anche

$$\begin{aligned} E_0 &\geq -M(\max_n(\vec{\sigma}_n \cdot \vec{\sigma}_{n+1} + (\Delta - 1)\sigma_n^z \sigma_{n+1}^z)) \\ &\geq -M(\max_n(\vec{\sigma}_n \cdot \vec{\sigma}_{n+1}) + \max_n((\Delta - 1)\sigma_n^z \sigma_{n+1}^z)) = -M\Delta, \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.

L'interpretazione fisica di questo risultato è che per $\Delta \geq 1$ l'Hamiltoniana (1.4) descrive un ferromagnete, e dunque nello stato fondamentale tutti gli *spin* sono paralleli.

Per quanto abbiamo notato nella sezione 1.4, per $\Delta = 1$ lo stato fondamentale ha degenerazione $M + 1$. Quando $\Delta > 1$ invece la degenerazione è doppia: lo stato fondamentale non dipende da Δ e corrisponde agli autovalori massimo e minimo della magnetizzazione, ovvero a $m = 0$ e $m = M$, rispettivamente.

1.8.2 $\Delta < 1$

Vi sono delle differenze fra catene con numero di siti pari o dispari. Ricordando l'analisi della sezione 1.3, sappiamo che lo spettro dell'Hamiltoniana è simmetrico nell'autovalore della magnetizzazione s^z . Se il numero di siti è dispari, s^z prende valori seminteri: pertanto lo stato fondamentale ha necessariamente degenerazione (almeno) doppia. Viceversa se il numero di siti è pari il ragionamento non può applicarsi, perché in questo caso s^z è intero: è quindi possibile il caso di uno stato

fondamentale non degenerare con $s^z = 0$. Nella regione $\Delta < 1$ accade proprio questo, e quindi in questo settore è necessario distinguere il caso M pari e quello M dispari.

Per M pari infatti lo stato fondamentale è unico [7] ed è caratterizzato da $s^z = 0$ e dunque $m = M/2$; la sua forma esplicita dipende sia da M che da Δ . Nel limite $\Delta \rightarrow -\infty$ il modello descrive un antiferromagnete di Ising e lo stato fondamentale diventa $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow \dots \uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow \dots \downarrow\uparrow\rangle)$.

Nel caso in cui M è dispari c'è degenerazione, ma nuovamente non si sa esprimere la forma dello stato fondamentale per Δ generico.

Quando $\Delta = -1/2$ ed M è dispari, considerazioni generali ed indizi numerici (diagonalizzazione esplicita dell'Hamiltoniana per $M \leq 17$) candidano fortemente un particolare stato, descritto da Razumov e Stroganov in [10], ad essere quello fondamentale. Stroganov ha inoltre dimostrato con tecniche analitiche [11] che l'autoenergia è pari a $E_0 = -\frac{3M}{2}$.

Parleremo più in dettaglio dello stato di Razumov–Stroganov e delle sue caratteristiche nel Capitolo 3: anticipiamo che tale stato presenta una straordinaria regolarità ed un legame, a prima vista sorprendente, con un oggetto matematico che ha a lungo sfidato la comprensione degli specialisti del calcolo combinatorio: le matrici a segno alterno.

Capitolo 2

Le matrici a segno alterno

2.1 Definizione

Una matrice a segno alterno (ASM, acronimo dell'inglese *alternating sign matrix*) di ordine M è una matrice quadrata $M \times M$ i cui elementi appartengono all'insieme $\{0; +1; -1\}$, e soddisfacente le seguenti due proprietà:

- In ciascuna riga o colonna, gli elementi non nulli si alternano in segno
- La somma degli elementi di ciascuna riga o colonna è $+1$

. Ad esempio, le 7 ASM di ordine 3 sono

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mentre una delle 429 matrici a segno alterno di ordine 5 è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Notiamo *en passant* che le due proprietà che definiscono le ASM ne implicano una terza che sarà utile nel seguito per la definizione della enumerazione raffinata: nella prima riga, una matrice a segno alterno ha necessariamente un solo elemento non nullo, e questo è pari a 1.

Le matrici a segno alterno sono una generalizzazione delle matrici di permutazione (ad esempio, fra le 7 ASM di ordine 3 quelle che non contengono elementi negativi sono le $3!$ matrici di permutazione 3×3) e storicamente sono state introdotte negli anni Ottanta del ventesimo secolo da Mills, Robbins e Rumsey [12] nell'ambito dello studio di un algoritmo, introdotto nel diciannovesimo secolo da Dodgson (*alias* Lewis Carroll), utile al calcolo dei determinanti [13]. I legami delle matrici a segno alterno con la meccanica statistica sono noti fin dal lavoro di Kuperberg [14].

2.2 Conteggi delle matrici a segno alterno

Sulla base di analisi numeriche (il conteggio esplicito dà la serie 1, 2, 7, 42, 429, 7436, 218348...) il numero di matrici a segno alterno di ordine M è stato congetturato da Mills, Robbins e Rumsey essere uguale a:

$$A_M = \prod_{j=0}^{M-1} \frac{(3j+1)!}{(M+j)!}. \quad (2.2)$$

Circa dieci anni dopo la formulazione della congettura, Zeilberger [15] ne ha fornito una prova; Kuperberg [14] con una dimostrazione alternativa ha sottolineato per primo la relazione fra le ASM e la fisica, utilizzando nel suo lavoro i risultati ottenuti in meccanica statistica per il modello a sei vertici.

Un tipo più sottile di conteggio è definito dalla cosiddetta x -enumerazione: in questo caso ogni matrice è conteggiata con un peso x^k dove k è il numero totale di elementi pari a -1 (ad esempio fra le ASM di ordine 3 ci sono 6 matrici con $k = 0$ e 1 matrice con $k = 1$).

Se etichettiamo arbitrariamente le A_M matrici a segno alterno di ordine M con un indice j , possiamo indicare con k_j il numero di elementi uguali a -1 nella j -esima matrice, e la x -enumerazione risulta:

$$A(M; x) = \sum_{j=1}^{A_M} x^{k_j}. \quad (2.3)$$

Interpretando ciascuna matrice come un possibile stato di un sistema fisico con energia collegata linearmente a k_j , questa formula ricorda da vicino la definizione di funzione di partizione in meccanica statistica.

Per alcuni casi particolari è nota una formula chiusa per le x -enumerazioni; per $x = 2$ si ha (si veda [12])

$$A(M; 2) = 2^{\frac{M(M-1)}{2}}, \quad (2.4)$$

mentre in [14] si trova la dimostrazione che per $x = 3$ vale

$$A(2m+1; 3) = 3^{m(m+1)} \prod_{k=1}^m \left[\frac{(3k-1)!}{(m+k)!} \right]^2 \quad (2.5)$$

$$A(2m+2; 3) = 3^m \frac{(3m+2)!m!}{[(2m+1)!]^2} A(2m+1; 3) \quad (2.6)$$

Possiamo inoltre definire la enumerazione raffinata $A(M, r)$ conteggiando soltanto quelle ASM di ordine M in cui l'unico 1 nella prima riga si trova in corrispondenza della r -esima colonna. La enumerazione raffinata non è altro che, a meno di una

normalizzazione, una particolare funzione di correlazione.

Come congetturato in [12] e dimostrato in [15], si ha che

$$A(M, r) = \frac{\binom{M+r-2}{M-1} \binom{2M-1-r}{M-1}}{\binom{3M-2}{M-1}} A_M. \quad (2.7)$$

Infine, si possono combinare i concetti di x -enumerazione e di enumerazione raffinata, definendo così la x -enumerazione raffinata delle ASM di ordine N :

$$A(M, r; x) = \sum_{j=1}^{A(M,r)} x^{kj}. \quad (2.8)$$

La 2-enumerazione raffinata ha una forma particolarmente semplice [12],[16]:

$$A(M, r; 2) = \binom{M-1}{r-1} \frac{A(M; 2)}{2^{M-1}}. \quad (2.9)$$

Una espressione per la 3-enumerazione raffinata è stata ottenuta da Colomo e Pronko in [17]:

$$A(2m+2, r; 3) = \frac{b(m, r-1) + b(m, r-2)}{2} A(2m+2; 3) \quad (2.10)$$

$$A(2m+3, r; 3) = \frac{2b(m, r-1) + 5b(m, r-2) + 2b(m, r-3)}{9} A(2m+3; 3) \quad (2.11)$$

dove per $s = 0, 1, \dots, 2m$

$$b(m, s) = \frac{(2m+1)!m!}{3^m(3m+2)!} \sum_{\ell=\max\{0; s-m\}}^{\lfloor s/2 \rfloor} 2^{s-2\ell} (2m+2-s+2\ell) \times \binom{3m+3}{s-2\ell} \binom{2m+\ell-s+1}{m+1} \binom{m+\ell+1}{m+1}$$

mentre $b(m, s) = 0$ per tutti gli altri valori di s .

Capitolo 3

Le congetture di

Razumov–Stroganov

Un articolo del 2000 di Razumov e Stroganov [10] formulava alcune interessanti congetture circa la forma dell'autostato fondamentale dell'Hamiltoniana della catena XXZ (1.4) con condizioni al contorno periodiche, nel caso particolare di $\Delta = -\frac{1}{2}$ e numero dispari di siti ($M = 2m + 1$).

Dunque

$$H = - \sum_{n=1}^M \left(2(\sigma_n^+ \sigma_{n+1}^- + \sigma_n^- \sigma_{n+1}^+) - \frac{1}{2} \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z \right), \quad \vec{\sigma}_{n+M} = \vec{\sigma}_n. \quad (3.1)$$

Razumov e Stroganov hanno individuato per questo sistema un particolare autostato, al quale ci riferiremo nel seguito con l'espressione *stato di Razumov–Stroganov*. Lo stato di Razumov–Stroganov ha autovalori noti per l'energia, la magnetizzazione ed il momento totale. La prima congettura ipotizza che si tratti proprio dello stato fondamentale.

Congettura 1 *Se il numero M di siti reticolari è dispari, lo stato fondamentale $|\Psi\rangle$ dell'Hamiltoniana (3.1) ha autovalori $E = -\frac{3M}{2}$, $s^z = \pm\frac{1}{2}$, $P = 0$.*

Per l'espressione delle congetture successive, basate su studi numerici (diagona-

lizzazione esplicita dell'Hamiltoniana per $M \leq 17$), è conveniente introdurre una notazione peculiare.

Utilizziamo la base naturale $\{|e_k\rangle\}$ in cui tutti i σ_n^z sono diagonali, ed etichettiamo ogni vettore della base con gli autovalori di $\frac{1-\sigma_n^z}{2}$. Ad esempio, nel semplice caso $M = 3$, lo stato $|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle$ corrisponde a $|100\rangle$.

Ovviamente lo stato di Razumov–Stroganov può essere espanso su questa base:

$$|\Psi\rangle = \sum_{k=1}^{2^M} |e_k\rangle \langle e_k|\Psi\rangle \quad (3.2)$$

Useremo per il coefficiente $\langle e_k|\Psi\rangle$ la notazione $\Psi_{D(k)}$, dove $D(k)$ indica la particolare disposizione di 0 e 1 che corrisponde al vettore $|e_k\rangle$.

In accordo con la prima congettura, nello stato candidato ad essere l'autostato fondamentale si ha $s^z = \pm\frac{1}{2}$. Possiamo specializzarci senza perdere in generalità al caso $s^z = +\frac{1}{2}$ (per via della simmetria dello spettro rispetto all'autovalore della magnetizzazione, tutte le considerazioni valgono infatti anche per lo stato con $s^z = -\frac{1}{2}$). I soli coefficienti non nulli sono pertanto quelli corrispondenti a quei vettori della base con m *spin* giù e $m + 1$ *spin* su. Ad esempio, nel caso $M = 3$ la componente $\Psi_{000} = \langle\uparrow\uparrow\uparrow|\Psi\rangle$ è necessariamente nulla.

Inoltre, causa dell'invarianza dello stato di Razumov–Stroganov per traslazioni unitarie ($P = 0$) i coefficienti dei vettori della base che differiscono per una permutazione ciclica devono essere identici. Ad esempio, nel caso $M = 3$ le componenti $\Psi_{001} = \langle\uparrow\uparrow\downarrow|\Psi\rangle$ e $\Psi_{010} = \langle\uparrow\downarrow\uparrow|\Psi\rangle$ sono necessariamente uguali. È dunque sufficiente conoscere il coefficiente di una particolare permutazione per conoscere anche altri $M - 1$ coefficienti.

A questo punto siamo pronti per enunciare la successiva

Congettura 2 *Scegliendo la normalizzazione dello stato di Razumov–Stroganov in modo che $\Psi_{0\dots 01\dots 1} = 1$ allora tutti gli altri coefficienti sono interi, ed il maggiore è $\Psi_{00101\dots 01} = A_m$.*

Con A_m abbiamo indicato il numero di matrici $m \times m$ a segno alterno ($m = \frac{M-1}{2}$).

La terza congettura riguarda la norma dello stato considerato:

Congettura 3 *Scegliendo la normalizzazione dello stato fondamentale in modo che $\Psi_{0\dots 01\dots 1} = 1$ la norma dello stato di Razumov-Stroganov è*

$$\mathcal{N}(m) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^m \left(\prod_{j=0}^{m-1} \frac{3j-1}{2j-1}\right) A_m.$$

Dai dati numerici sembra emergere anche una ulteriore particolare relazione fra i coefficienti:

Congettura 4 *La somma delle componenti dello stato di Razumov-Stroganov normalizzato in modo che $\Psi_{0\dots 01\dots 1} = 1$ è*

$$3^{\frac{m}{2}} \mathcal{N}(m)$$

Menzioniamo anche le successive due ipotesi, che riguardano invece le correlazioni fra gli *spin*.

Utilizzando la notazione $a_j = \frac{1-\sigma_j^z}{2}$, Razumov e Stroganov hanno formulato per la correlazione fra due *spin* secondi vicini la seguente predizione:

Congettura 5

$$\langle a_n a_{n+2} \rangle = \frac{m-1}{4(2m-1)(2m+1)^2(2m+3)} \left(\frac{71m^3}{4} + \frac{149m^2}{4} + 18m + 9 \right),$$

Razumov e Stroganov hanno anche ipotizzato un'espressione per la cosiddetta *probabilità di formazione di stringhe ferromagnetiche*:

Congettura 6 *La Probabilità di Formazione di Stringhe Ferromagnetiche è data*

dalla formula ricorsiva

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\langle a_1 a_2 \dots a_{k-1} \rangle}{\langle a_1 a_2 \dots a_k \rangle} = \frac{(2k-2)!(2k-1)!(2m+k)!(m-k)!}{(k-1)!(3k-2)!(2m-k+1)!(m+k-1)!} \\ \langle a_1 a_2 \rangle = \frac{m(m-1)}{2(2m+1)^2} \end{array} \right.$$

La settima congettura riguarda una catena con campo magnetico esterno, e non ce ne occuperemo in questa sede.

In ulteriori lavori [18], [19] sono state formulate congetture ancora più raffinate sulla natura topologica oltre che combinatoria dello stato fondamentale del cosiddetto *dense periodic $O(1)$ loop model*. Questo modello è collegato al *fully packed loop model*, i cui stati sono in corrispondenza biunivoca con le ASM.

Capitolo 4

Il modello a sei vertici

4.1 Definizione

Il modello a sei vertici [20] è un modello bidimensionale esattamente risolubile di meccanica statistica classica; una soluzione del modello per condizioni al contorno periodiche è stata trovata per primo da Lieb [21],[22],[23] e immediatamente dopo in un caso più generale con campo elettrico esterno da Sutherland, Yang e Yang [24].

Il sei vertici è un modello di cristalli bidimensionali con legami idrogeno. Un esempio classico è il modello in due dimensioni dell'acqua nello stato solido: nel modello gli atomi di ossigeno formano un reticolo quadrato con numero di coordinazione 4 (lo stesso del ghiaccio reale, in cui la geometria è tetraedrica). Fra ciascuna coppia adiacente di atomi di ossigeno si trova un atomo di idrogeno; dei 4 atomi di idrogeno che circondano ogni atomo di ossigeno, 2 vi sono legati tramite un legame covalente mentre gli altri 2 solo tramite un più debole legame idrogeno (*ice rule*, [25]).

Riportiamo nella Figura 2 una possibile disposizione secondo la *ice rule* delle molecole di H_2O in un cristallo di ghiaccio 5×5 :

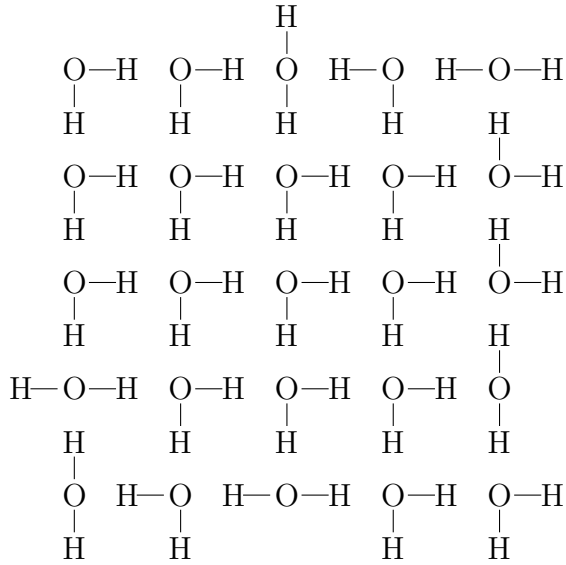


Figura 2

La termodinamica del modello può essere dedotta dalla sua funzione di partizione:

$$Z = \sum_{\text{stati}} e^{-\beta E_{\text{stato}}}, \quad (4.1)$$

dove β è l'inverso della temperatura e la somma va intesa su tutte le possibili configurazioni permesse dalla *ice rule* e compatibili con le condizioni al contorno (si veda il seguito).

Nella molecola di H_2O , o in altri composti chimici dalla struttura simile, si formano dipoli permanenti a causa dell'elevata elettronegatività dell'ossigeno rispetto all'idrogeno. Risulta allora naturale schematizzare il cristallo di ghiaccio con un reticolo quadrato i cui vertici corrispondono agli atomi di ossigeno e i cui *links* corrispondono agli atomi di idrogeno. Su ogni *link* poniamo una freccia diretta verso ogni atomo di idrogeno dal corrispondente atomo di ossigeno, ovvero nella direzione del dipolo elettrico.

In generale si può considerare un reticolo rettangolare di R righe per C colonne; dato tuttavia che l'estensione al caso $R \neq C$ è banale, per semplicità nel seguito porremo, almeno per questo capitolo, $R=C=M$ considerando quindi solo reticoli

quadrati.

La *ice rule*, con questa modellizzazione, equivale a richiedere che in ciascun vertice arrivino due frecce entranti e da ciascun vertice partano due frecce uscenti. Nella Figura 3 disegniamo a titolo di esempio la schematizzazione corrispondente alla disposizione della Figura 2.

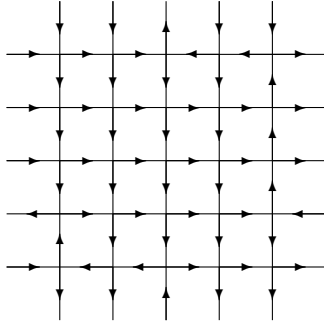


Figura 3

Le molecole possono disporsi in sei modi possibili, e pertanto ci sono sei possibili tipi di vertici (da cui il nome di modello a sei vertici). Ad ogni possibile disposizione corrisponde una diversa energia ϵ_j :

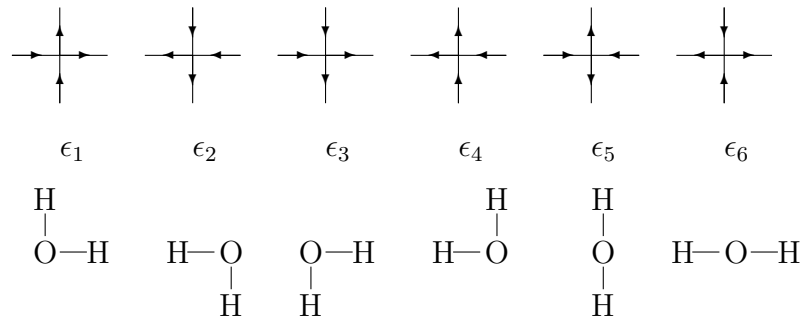


Figura 4

Se in un dato stato vi sono n_j vertici di tipo j , si ha pertanto

$$E_{stato} = \sum_{j=1}^6 n_j \epsilon_j.$$

Sottolineiamo che nelle Figure 1 e 2 si sono utilizzate le cosiddette condizioni al

contorno *periodiche*, o *toroidali*: si è cioè imposta periodicità sia in verticale che in orizzontale, o equivalentemente si è immaginato di porre il reticolo su un toro bidimensionale.

Questa non è l'unica possibilità, anche se è quella che è stata maggiormente analizzata in letteratura. Nel presente capitolo passeremo in rassegna i risultati ottenuti per questo caso, mentre nei capitoli successivi analizzeremo invece condizioni al contorno fissate, occupandoci nello specifico del caso particolare detto *a parete di dominio* (si veda il capitolo 5); citiamo infine per completezza anche le condizioni al contorno *antiperiodiche*, risolte da Baxter *et al.* in [26].

4.2 Sistemi fisici modellizzati dal sei vertici

Naturalmente nella realtà i cristalli sono tridimensionali; purtroppo però non esistono modelli esattamente risolubili in tre dimensioni, se non per stati molto particolari (Nagle, [27]).

Il modello a sei vertici, oltre a presentare il vantaggio dal punto di vista teorico di essere risolubile esattamente, fornisce delle predizioni in discreto accordo con il comportamento dei cristalli reali. Il modello del ghiaccio (sottosezione 4.2.1) in particolare approssima bene il comportamento del ghiaccio reale quanto alla sua entropia residua, perché questa dipende debolmente dalla dimensionalità del reticolo.

Nello specifico, il valore sperimentale (ottenuto per estrapolazione dei dati della celebre misura di Giauque e Stout, [28], descritta nell'Appendice F) dell'entropia molare residua del ghiaccio è di $0.82 \pm 0.05 \frac{\text{cal}}{\text{K}\cdot\text{mol}}$, a fronte della predizione del modello a sei vertici (Lieb, [21]; sezione 4.4.2) di $0.858 \frac{\text{cal}}{\text{K}\cdot\text{mol}}$.

Esistono inoltre materiali magnetici detti *spin ices* [29] in cui, a causa di una frustrazione geometrica, il comportamento dei dipoli magnetici segue la stessa *ice rule* dei dipoli elettrici nel ghiaccio. C'è interesse sperimentale sia negli *spin ices* artificiali che in composti naturali che presentano queste caratteristiche, in parti-

colare i piroclori come ad esempio il titanato di disprosio ($\text{Dy}_2\text{Ti}_2\text{O}_7$) o il titanato di olmio ($\text{Ho}_2\text{Ti}_2\text{O}_7$) [30],[31],[32].

Specificando ulteriormente i valori delle ϵ_j si ottengono modelli bidimensionali di diversi materiali. Tre casi sono particolarmente importanti dal punto di vista storico.

4.2.1 Ghiaccio

Nel ghiaccio le configurazioni sono isoenergetiche. Scegliendo opportunamente uno zero nella scala delle energie, possiamo quindi porre

$$\epsilon_j = 0 \quad \forall j$$

La funzione di partizione pertanto conta semplicemente il numero di possibili stati.

Il sistema ha un'entropia residua che (ponendo la costante di Boltzmann pari a 1) vale:

$$S(T = 0) = \ln Z_{\text{ice}} \quad (4.2)$$

ed è quindi maggiore di zero; si ritrova così il risultato di Pauling [33].

4.2.2 KDP

Il di-idrogeno fosfato di potassio (KH_2PO_4), o KDP, forma cristalli con numero di coordinazione 4, e a basse temperature si ordina ferroelettricamente. In [25], Slater ha per primo notato che questa sostanza poteva venire ben modellizzata da un modello a sei vertici con

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0, \quad \epsilon_3 = \epsilon_4 = \epsilon_5 = \epsilon_6 > 0$$

e condizioni al contorno toroidali.

Lo stato di energia minima, doppiamente degenere, ha tutte le frecce che puntano verso l'alto e verso destra (o tutte verso il basso e verso sinistra).

4.2.3 Materiali antiferroelettrici

Rys [34] ha notato che con condizioni al contorno toroidali e con la scelta

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 > 0, \quad \epsilon_5 = \epsilon_6 = 0$$

si poteva ottenere un modello per i materiali antiferroelettrici.

Lo stato di minima energia ha di nuovo degenerazione doppia e vi compaiono solo vertici di tipo 5 e 6, alternati l'uno all'altro come le case bianche e nere di una scacchiera.

4.3 Soluzione del modello a sei vertici con condizioni al contorno toroidali

Il problema fondamentale della meccanica statistica è il calcolo esplicito della (4.1). A partire dall'espressione della funzione di partizione nel caso più generale in cui è presente un campo elettrico esterno si possono derivare tutte le funzioni di interesse; in particolare dal limite termodinamico $M \rightarrow \infty$ possono essere calcolate tutte le funzioni termodinamiche e studiate le eventuali transizioni di fase.

In questo capitolo riporteremo alcuni risultati per la funzione di partizione in assenza di campo esterno. In questa situazione ci si può aspettare completa simmetria per inversione di tutti i dipoli, ovvero

$$\epsilon_1 = \epsilon_2, \quad \epsilon_3 = \epsilon_4, \quad \epsilon_5 = \epsilon_6. \quad (4.3)$$

La terza di queste identità è automatica in caso di condizioni al contorno toroidali.

Utilizzando la (4.3), conviene introdurre i pesi di Boltzmann ω delle varie configurazioni, e definire:

$$\omega_j := e^{-\beta\epsilon_j}; \quad (4.4)$$

$$a := \omega_1 = \omega_2, \quad b := \omega_3 = \omega_4, \quad c := \omega_5 = \omega_6. \quad (4.5)$$

Si ha dunque che

$$Z = \sum_{\text{stati}} a^{n_a} b^{n_b} c^{n_c}, \quad (4.6)$$

dove n_x è il numero di vertici nella configurazione con peso di Boltzmann $x = a, b, c$, e $\sum_x n_x = M^2$. Pertanto, a meno di un fattore moltiplicativo c^{M^2} , fisicamente irrilevante, i parametri effettivamente significativi sono solo due, i rapporti a/c e b/c .

Notiamo che una possibile generalizzazione del modello si può ottenere facendo dipendere i tre pesi a, b, c dalla posizione nel reticolo, cioè $x = x(\alpha, \kappa)$ essendo $(\alpha, \kappa) = (1, 1), \dots, (M, M)$ la coppia di parametri interi cartesiani che specifica la posizione di un dato vertice. Il limite in cui gli x non dipendono dalla posizione si chiama in letteratura *limite omogeneo*.

Daremo nel seguito un breve cenno al metodo risolutivo classico nel caso di condizioni al contorno toroidali e nel limite omogeneo, rimandando a [20] per una trattazione più esaustiva.

Consideriamo una colonna, la n -esima da sinistra, del reticolo (nella Figura 4 abbiamo disegnato a titolo di esempio un particolare stato di una colonna di un modello con $M = 4$ e condizioni al contorno toroidali).

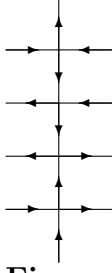


Figura 4

Indichiamo con ϕ_n la configurazione delle frecce sui *links* orizzontali a sinistra e con ϕ_{n+1} la configurazione delle frecce sui *links* orizzontali di destra.

La matrice di trasferimento per la colonna è definita come:

$$\tau(\phi_n, \phi_{n+1}) = \sum a^{m_a} b^{m_b} c^{m_c} \quad (4.7)$$

dove la somma è intesa su tutte le configurazioni possibili (quelle cioè permesse dalla *ice rule* considerati i vincoli ϕ_n e ϕ_{n+1}) dei *links* verticali; m_x è il numero di vertici di quella colonna con peso x in una data configurazione.

Allora la funzione di partizione è

$$Z = \sum_{\phi_1} \sum_{\phi_2} \dots \sum_{\phi_M} \tau(\phi_1, \phi_2) \tau(\phi_2, \phi_3) \dots \tau(\phi_{M-1}, \phi_M) \tau(\phi_M, \phi_1) = \text{Tr}(\tau^M). \quad (4.8)$$

Detti θ_j , $j = 1, \dots, 2^M$ gli autovalori della matrice τ :

$$Z = \sum_{j=1}^{2^M} \theta_j^M; \quad Z \sim \theta_1^M \quad \text{per} \quad M \rightarrow \infty, \quad (4.9)$$

dove θ_1 è il massimo autovalore.

Introducendo il parametro

$$\Delta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \quad (4.10)$$

si dimostra [20] che due matrici $\tau(a_1, b_1, c_1)$ e $\tau(a_2, b_2, c_2)$ commutano purché $\Delta_1 =$

Δ_2 .

Conviene parametrizzare i pesi di Boltzmann nel seguente modo:

$$a = \rho \sin(\lambda + \eta), \quad b = \rho \sin(\lambda - \eta), \quad c = \rho \sin(2\eta). \quad (4.11)$$

Si verifica facilmente che risulta $\Delta = \cos(2\eta)$, e si ottiene un'equazione analoga alla (1.16):

$$[\tau(\lambda_1, \eta), \tau(\lambda_2, \eta)] = 0 \quad \forall \lambda_1, \lambda_2. \quad (4.12)$$

È possibile [20] costruire una seconda famiglia di matrici $Q(\lambda)$ che commutano fra loro e con tutte le $\tau(\lambda)$: si hanno dunque due famiglie di matrici simultaneamente diagonalizzabili.

Inoltre gli autovalori q delle matrici Q soddisfano le **equazioni T-Q di Baxter**:

$$\theta(\lambda)q(\lambda) = \chi(\lambda - \eta)q(\lambda + 2\eta) + \chi(\lambda + \eta)q(\lambda - 2\eta) \quad (4.13)$$

$$\chi(\lambda) = (\rho \sin(\lambda))^M \quad (4.14)$$

Poiché le funzioni q devono essere periodiche in λ con periodo 2π [20], supponendo che abbiano m zeri in $-\pi < \text{Re}(\lambda) < \pi$, si può scrivere:

$$q_m(\lambda) = c \prod_{j=1}^m \sin(\lambda - \lambda_j). \quad (4.15)$$

Il polinomio trigonometrico $q_m(\lambda)$ è detto *polinomio di Baxter*.

Ponendo nelle equazioni T-Q di Baxter $\lambda = \lambda_j$ si ritrovano le equazioni di Bethe nella forma (1.25). Si arriva inoltre alla seguente espressione per gli autovalori di $\tau(\lambda)$:

$$\theta(\lambda, \{\lambda_j\}) = \rho^M [(\sin(\lambda - \eta))^M \prod_{j=1}^m \frac{\sin(\lambda - \lambda_j + 2\eta)}{\sin(\lambda - \lambda_j)} + (\sin(\lambda + \eta))^M \prod_{j=1}^m \frac{\sin(\lambda - \lambda_j - 2\eta)}{\sin(\lambda - \lambda_j)}], \quad (4.16)$$

con $\{\lambda_j\}$ insieme di soluzioni di Bethe.

4.4 Fasi del modello a sei vertici con condizioni al contorno toroidali

Nella Figura 5 riportiamo il diagramma delle fasi del limite termodinamico del modello.

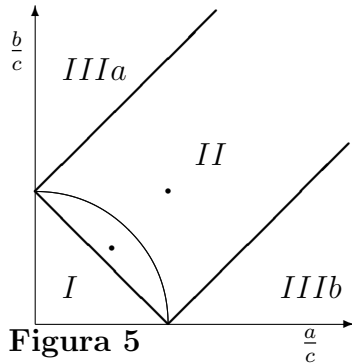


Figura 5

Le due semirette parallele a $b = a$ sono le curve $\Delta = 1$; il segmento parallelo a $b = -a$ è la curva $\Delta = -1$; l'arco di circonferenza è la curva $\Delta = 0$. Quest'ultima è anche chiamata *linea dei fermioni liberi*. I due punti di coordinate $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}) = (1, 1)$ e $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}) = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$, disegnati anche nella Figura 5, prendono i nomi inglesi di, rispettivamente, *Ice Point* e *Dual Ice Point*.

Le curve $\Delta = \pm 1$ suddividono il piano delle fasi in quattro settori, indicate con numeri romani nella Figura 5.

Il modello del ghiaccio corrisponde appunto all'*Ice Point*. Il modello di Slater del KDP si muove al variare della temperatura sulla semiretta $\frac{b}{c} = 1, \frac{a}{c} > 1$; il modello di Rys degli antiferroelettrici si muove al variare di T sulla semiretta $a = b, \frac{a}{c} < 1$.

4.4.1 Settore I: $\Delta < -1$

Le condizioni a, b, c reali positive e $\Delta < -1$ non possono essere contemporaneamente garantite da λ e η reali. Ponendo invece $\lambda = \frac{\pi}{2} + i\tilde{\lambda}$ e $\eta = \frac{\pi}{2} + i\tilde{\eta}$ con $\tilde{\lambda}$ e $\tilde{\eta}$ reali e $\tilde{\eta} > |\tilde{\lambda}|$ si soddisfano tali richieste (salvo un fattore $-i$ comune ad a, b, c che

comunque può essere trascurato per il fatto che la fisica del sistema dipende solo da $\frac{a}{c}$ e $\frac{b}{c}$).

Il sistema è in una fase ordinata antiferroelettrica.

Supponendo M pari, lo stato fondamentale è tale che vi sono solo vertici di tipo 5 e 6, disposti alternativamente come le case bianche e nere di una scacchiera infinita. C'è dunque degenerazione doppia.

Si trova la seguente espressione analitica per l'energia libera al limite termodinamico (si veda [20]):

$$-\beta F = \ln Z = M^2 \left(-\beta\epsilon_1 + 2(\tilde{\eta} - \tilde{\lambda}) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-2j\tilde{\eta}} \sinh(2j(\tilde{\eta} - \tilde{\lambda}))}{j \cosh(2j\tilde{\eta})} \right) + o(M^2)$$

.

4.4.2 Settore II: $|\Delta| < 1$

In questo caso per avere a, b, c reali positive si impone $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$, $\eta < \lambda < \pi - \eta$. Questo settore include anche l'*Ice Point* e il *Dual Ice Point*.

Il sistema è in una fase disordinata (in accordo con l'intuizione fisica visto che mandando $T \rightarrow \infty$ si ha per qualsiasi modello che $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}) \rightarrow \text{Ice Point} \in \text{Settore II}$). La linea dei fermioni liberi è critica: su questa curva i correlatori decadono come una potenza della distanza fra i siti e dunque la lunghezza di correlazione è infinita (si veda [35]).

Al limite termodinamico si ha per l'energia libera l'andamento (si veda [20]):

$$-\beta F = M^2 \left(-\beta\epsilon_1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh(2(\lambda - \eta)x) \sinh(2\eta x)}{2x \sinh(\pi x) \cosh((\pi - 2\eta)x)} dx \right) + o(M^2).$$

L'integrale in generale non è calcolabile analiticamente; il caso $\frac{\eta}{\pi} \in \mathbb{Q}$ fa eccezione. In particolare, per l'*Ice Point* si ottiene il famoso risultato per l'entropia residua molecolare del ghiaccio (Lieb, [21]): $Z_{\text{ice}}^{\frac{1}{M^2}} = \frac{8\sqrt{3}}{9}$.

4.4.3 Settori IIIa e III b : $\Delta > 1$

Nel settore IIIb affinché i parametri siano fisicamente sensati si pone $\lambda = i\check{\lambda}, \eta = i\check{\eta}$ con $\check{\lambda}, \check{\eta}$ reali; inoltre dev'essere $0 < \check{\eta} < \check{\lambda}$. a, b, c risultano così reali positivi a meno di un fattore comune i che può essere semplificato rinormalizzando.

Nel settore IIIa si pone invece $\lambda = \pi - i\check{\lambda}, \eta = i\check{\eta}$, sempre con $0 < \check{\eta} < \check{\lambda}$. I tre pesi risultano ancora reali positivi a meno di un fattore i .

Il sistema è in una fase ordinata ferroelettrica.

Lo stato fondamentale ha degenerazione doppia. Nel sottoinsieme connesso IIIa lo stato fondamentale ha tutti i vertici di tipo 1 o tutti di tipo 2; invece in IIIb i vertici sono tutti di tipo 3 o tutti di tipo 4.

Dal punto di vista matematico è il caso di trattazione più semplice (si veda ad esempio [20]). Si ottiene infatti $\theta_1 = a^M + b^M$ da cui per la (4.9) $Z^{\frac{1}{M^2}} \sim \max(a; b)$. C'è ordine ferroelettrico completo: gli stati eccitati danno un contributo trascurabile alla funzione di partizione e, fissato lo stato di un qualsiasi vertice, la probabilità che un qualsiasi altro si trovi nel medesimo stato è 1.

4.5 Transizioni di fase per condizioni toroidali

Al variare della temperatura, il sistema percorre una traiettoria nello spazio delle fasi di Figura 6 che tende all'*Ice Point* per $T \rightarrow +\infty$.

Consideriamo i due più piccoli elementi dell'insieme $\{\epsilon_1, \epsilon_3, \epsilon_5\}$. Se sono uguali, allora la traiettoria è interamente contenuta nel Settore II¹ e non c'è nessuna transizione di fase.

Viceversa se il più piccolo fra $\epsilon_1, \epsilon_3, \epsilon_5$ è strettamente minore degli altri due si ha

¹Dimostrazione: ci sono quattro sottocasi.

$\epsilon_1 = \epsilon_3 = \epsilon_5$ è l'*Ice Point* $\forall T$.

Se $\epsilon_1 = \epsilon_3 < \epsilon_5$, $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}) = (x(T), x(T))$ con $x > 1 \forall T$.

Se $\epsilon_1 = \epsilon_5 < \epsilon_3$, $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}) = (1, y(T))$ con $y < 1 \forall T$.

Se $\epsilon_5 = \epsilon_3 < \epsilon_1$, $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}) = (y(T), 1)$ con $y < 1 \forall T$.

una transizione di fase. Le caratteristiche della transizione sono differenti a seconda che a basse temperature il sistema si trovi nel settore I o nel settore III.

4.5.1 Transizione III→II

Possiamo senza perdere in generalità supporre che ϵ_3 sia più piccolo di ϵ_1 ed ϵ_5 , cioè che a basse temperature il sistema sia nel settore IIIa: il caso del settore IIIb è equivalente pur di scambiare in tutte le considerazioni i pesi a e b e le energie ϵ_1 e ϵ_3 .

La temperatura critica è data dalla condizione $b(T_c) = a(T_c) + c(T_c)$.

Si può dimostrare [20] che l'andamento dell'energia libera per piccoli valori di $\delta = T - T_c$ è del tipo $\frac{F}{M^2} \sim \epsilon_3 - \frac{T_c}{2}\delta + \mathcal{O}(\delta^{\frac{3}{2}})$ per $\delta > 0$; per $\delta < 0$ è facile vedere dai risultati della precedente sezione che $\frac{F}{M^2} = \epsilon_3$.

Alla temperatura critica c'è dunque una transizione di fase del primo ordine.

4.5.2 Transizione I→II

È il caso in cui ϵ_5 è minore di ϵ_1 e di ϵ_3 .

La temperatura critica stavolta è data dalla condizione $a(T_c) + b(T_c) = c(T_c)$.

Si trova [20] che quando $\delta = T - T_c$ tende a zero la differenza dF fra l'energia libera nel settore I F_I e l'energia libera nel settore II F_{II} va come $\frac{dF}{M^2} \sim \exp(-\frac{1}{|\delta|^{\frac{1}{2}}})$. In altre parole in $T = T_c$ l'energia libera come funzione della temperatura è di classe C^∞ ma non è analitica.

Si ha una transizione di fase di ordine infinito del tipo *di Berezinsky-Kosterlitz-Thouless*.

Capitolo 5

Le condizioni al contorno a parete di dominio

5.1 Definizione

Il modello a sei vertici ammette anche condizioni al contorno diverse da quelle completamente periodiche: una scelta alternativa possibile è quella delle condizioni antiperiodiche [26].

Si parla di condizioni al contorno *fisse* quando si specifica lo stato delle frecce poste sui $4M$ *links* più esterni del reticolo; ci sono diverse possibili scelte compatibili con la *ice rule*.

Fra le condizioni al contorno fisse, di particolare interesse per questo lavoro di tesi sono quelle dette *a parete di dominio* (DWBC, dall'inglese *Domain Wall Boundary Conditions*), introdotte nel 1982 da Korepin [36] al fine di dimostrare una congettura sul modulo quadro degli autostati di Bethe nota come *ipotesi di Gaudin* [37]. Seguendo il lavoro di Korepin, nel 1987 Izergin ha per primo calcolato una forma chiusa per la funzione di partizione del modello con queste condizioni al contorno [38].

Il nome “*domain wall*”, antonomastico per questa classe di condizioni al contorno, deriva dall'interpretazione delle frecce come *spin* (si veda la sezione 5.4).

Con questa interpretazione infatti le DWBC corrispondono a fissare tutti *spin* su sui *links* verticali più in basso e sui *links* orizzontali più a destra, e tutti *spin* giù sui *links* verticali più in alto e su quelli orizzontali più a sinistra; il nome *domain wall* è stato storicamente associato a questa interpretazione delle frecce sui *links* come momenti magnetici allineati (domini magnetici).

Imponendo DWBC si fissano le direzioni delle frecce sui *links* più esterni: frecce verticali entranti nei vertici della prima e dell'ultima riga e frecce orizzontali uscenti dai vertici della prima e dell'ultima colonna. Equivalentemente, nell'intepretazione delle molecole di acqua non si disegnano atomi di idrogeno più in alto della prima riga di atomi di ossigeno né più in basso dell'ultima riga.

Rappresentiamo nelle Figure 6 e 7 lo stato di un cristallo di ghiaccio 5×5 con DWBC e la corrispondente configurazione nella schematizzazione a frecce su reticolo:

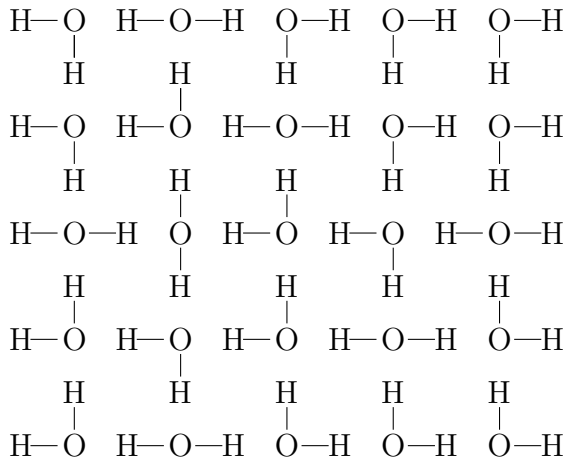


Figura 6

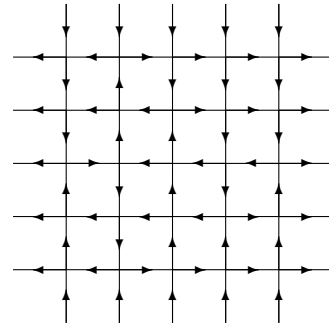


Figura 7

Nel modello a sei vertici con condizioni al contorno a parete di dominio si perde l'invarianza per traslazione presente con condizioni periodiche. La mancanza di questa simmetria fa emergere caratteristiche particolari come la *separazione delle fasi*, che descriviamo nella prossima sezione, e rende tecnicamente molto difficile lo

studio del modello.

Inoltre, in relazione alle congetture di Razumov–Stroganov le DWBC sono molto interessanti, perché in questo caso il modello è collegato sia con la catena XXZ (si veda la sezione 5.4) che con le ASM (si veda la sezione 5.3).

5.2 Separazione delle fasi

Anche nel caso di DWBC si possono distinguere tre fasi del modello. Tuttavia i risultati analitici per le funzioni termodinamiche non sempre risultano uguali a quelli ottenuti per condizioni al contorno periodiche.

Questa inusuale dipendenza della termodinamica dalle condizioni al contorno è conseguenza del fatto che nel modello a sei vertici queste inducono una polarizzazione locale¹. Nel caso di DWBC, come per molte altre condizioni al contorno fisse, la polarizzazione totale è fissata² e la polarizzazione locale è dipendente dalla posizione. In altre parole le due direzioni possibili della freccia posta su un certo *link* del reticolo non sono in generale equiprobabili, e le probabilità dipendono dalla posizione nel reticolo del *link* considerato.

Fa eccezione a questa differenza di risultati fra condizioni al contorno periodiche e a parete di dominio il caso $\Delta > 1$, nel quale si può dimostrare [39],[40] che la funzione di partizione al limite termodinamico ha la stessa espressione sia con DWBC che nel caso di condizioni periodiche (sezione 4.4.3). Ciò che cambia sono le configurazioni di minima energia: queste corrispondono a un particolare stato ferroelettrico, diverso per ciascuno dei due sottoinsiemi connessi del settore III della Figura 5.

Nella Figura 8 riportiamo uno di questi due stati. Si tratta dello stato di energia

¹Definita come la media pesata del vettore $\vec{P} = \sum_{links=1}^4 \vec{f}(link)$; $\vec{f}(link)$ è il versore direzionale della freccia su un particolare *link* e può assumere valori $(\pm 1, 0)$ sui *links* orizzontali e $(0, \pm 1)$ sui *links* verticali

²Per DWBC è fissata a 0; per altre condizioni al contorno fissate può essere non nulla.

minima (non c'è degenerazione) nel settore IIIb della Figura 5. Lo stato fondamentale del settore IIIa si ottiene applicando alla Figura 8 una simmetria rispetto ad un asse verticale o orizzontale.

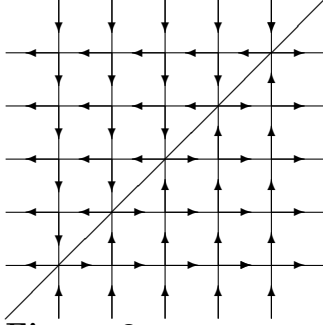


Figura 8

Come si vede dalla Figura 8, nello stato fondamentale del settore IIIb i vertici di tipo 6 posti sulla diagonale separano due sottoinsiemi distinti del reticolo. In uno dei due (quello al di sotto/a destra della linea di separazione disegnata nella Figura 8) si trovano tutti vertici di tipo 1, mentre l'altro contiene solo vertici di tipo 2. Nello stato fondamentale del settore IIIa la diagonale di vertici di tipo 6 separa una zona con vertici di tipo 3 da una con vertici di tipo 4.

Nella fase disordinata $|\Delta| < 1$, invece, l'espressione analitica della funzione di partizione al limite termodinamico con DWBC differisce da quella con condizioni periodiche.

In particolare è stato mostrato che stavolta si ha per l'energia libera al limite termodinamico [39],[41],[42]:

$$-\beta F = M^2 \ln \left(\frac{\pi}{\pi - 2\eta} \frac{\sin(\lambda + \eta) \sin(\lambda - \eta)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{2\lambda - \pi}{\pi - 2\eta}\right)} \right) + o(M^2),$$

un'espressione analitica semplice in contrasto con l'espressione integrale che si ottiene imponendo condizioni al contorno periodiche. Per il comportamento sulla linea critica della transizione di fase si veda [43].

Il comportamento peculiare dell'energia libera al limite termodinamico nella fase disordinata del modello con DWBC è ascrivibile al fenomeno della *separazione delle fasi*, di cui si hanno conferme sia numeriche [44], [45], [46] che analitiche [47]. Quando $M \rightarrow \infty$ il reticolo si suddivide in cinque sottoinsiemi, separati da una curva tangente ai quattro lati esterni. Nei quattro domini esterni alla curva separatrice i vertici diventano *congelati*, ovvero fissati ad essere di un certo tipo (rispettivamente 1, 2, 3 e 4 in ciascuna delle quattro zone); nel dominio interno invece il sistema rimane in una fase disordinata, anche se neanche qui c'è invarianza per traslazioni (la probabilità che un dato vertice si trovi in un dato stato resta dipendente dalla posizione).

Sulla linea dei fermioni liberi ($\Delta = 0$) la curva separatrice è un'ellisse, e in particolare è un cerchio quando si ha anche $\lambda = \frac{\pi}{2}$. Questo risultato è noto come *Teorema del circolo polare* (*Arctic circle theorem*, [48]).

5.3 Modello a sei vertici e matrici a segno alterno

Nel 1996 in [14] Kuperberg pubblicò una dimostrazione alternativa della formula per il numero di matrici a segno alterno facendo uso di risultati relativi al modello a sei vertici con DWBC.

Esiste infatti una semplice corrispondenza biunivoca fra ASM di ordine M e configurazioni di questo modello su un reticolo quadrato $M \times M$ siti.

Per passare da uno stato ad una matrice, è sufficiente sostituire uno 0 ai vertici di tipo 1, 2, 3, 4, un 1 ai vertici di tipo 6 (ovvero alle molecole di acqua disposte orizzontalmente) e un -1 ai vertici di tipo 5 (molecole verticali).

Viceversa, data una ASM, si sostituisce un vertice di tipo 6 ad ogni $+1$ e un vertice di tipo 5 ad ogni -1 ; mentre dato uno 0 si calcola la somma degli elementi sulla stessa riga a sinistra dello 0 e sulla stessa colonna sopra lo 0. Vi sono quattro possibili combinazioni per questa coppia di risultati, che determinano univocamente il tipo di vertice da far corrispondere allo 0: se entrambe le somme fanno 0 c'è

un vertice di tipo 2; se entrambe le somme fanno 1 c'è un vertice di tipo 1; se la somma sulla riga fa 0 ma quella sulla colonna fa 1 il vertice è di tipo 4; e infine se la somma sulla riga fa 1 mentre quella sulla colonna fa 0 c'è un vertice di tipo 3. Si può verificare per esempio che alla matrice a segno alterno (2.1) corrisponde univocamente lo stato di Figura 6 o Figura 7, e viceversa.

Sulla base di questa corrispondenza è possibile ottenere semplici formule per le x -enumerazioni delle matrici a segno alterno in termini della funzione di partizione del modello a sei vertici; in particolare è stata ottenuta [49] una elegante dimostrazione della formula per il numero di ASM.

Consideriamo infatti un modello a sei vertici $M \times M$ con DWBC nel limite omogeneo e nel caso particolare in cui i due parametri a e b sono uguali. Per quanto detto in precedenza sulla biezione con le matrici a segno alterno, si ha che $A(M; x) = \sum_{stati} x^{n_5}$, dove n_5 è il numero di vertici di tipo 5 in un certo stato. D'altra parte, poiché³ $n_6 - n_5 = M$, vale altresì $A(M; x) = \frac{1}{\sqrt{x^M}} \sum_{stati} \sqrt{x^{n_c}}$, dove si è reintrodotta $n_c = n_5 + n_6$.

Poiché infine $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 = M^2$, se si scelgono (λ, η) in modo che valgano $a = b$ e $\frac{c}{a} = \sqrt{x}$, si avrà la seguente relazione:

$$A(M; x) = \frac{Z_{DWBC}^{hom}}{a^{M^2} \sqrt{x^M}}. \quad (5.1)$$

Una soluzione che soddisfa le condizioni summenzionate è:

$$\lambda = \frac{\pi}{2}, \quad \eta = \arcsin \left(\frac{\sqrt{x}}{2} \right).$$

³Dimostrazione: In ciascuna delle M colonne della corrispondente matrice a segno alterno il numero di 1 supera necessariamente di una unità il numero di -1

Sono particolarmente semplici le formule per $x = 1, 2, 3$:

$$A_M = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{M^2} Z_M^{hom} \left(\lambda = \frac{\pi}{2}, \eta = \frac{\pi}{6} \right); \quad (5.2)$$

$$A(M; 2) = 2^{\frac{M(M-1)}{2}} Z_M^{hom} \left(\lambda = \frac{\pi}{2}, \eta = \frac{\pi}{4} \right); \quad (5.3)$$

$$A(M; 3) = \left(\frac{2}{\sqrt[2M]{3}} \right)^{M^2} Z_M^{hom} \left(\lambda = \frac{\pi}{2}, \eta = \frac{\pi}{3} \right). \quad (5.4)$$

Si ha dunque una corrispondenza fra la funzione di partizione del modello a sei vertici all'*Ice Point*, al punto $\lambda = \frac{\pi}{2}$ della linea dei fermioni liberi e al *Dual Ice Point* e, rispettivamente, il numero di ASM, la loro 2-enumerazione e la loro 3-enumerazione. La prima e la terza relazione in particolare ci saranno utili nel Capitolo 6.

5.4 Modello a sei vertici e catena XXZ

Esiste d'altra parte uno stretto collegamento fra modello a sei vertici e catena XXZ, già intuibile dalla comparsa delle equazioni di Bethe nel metodo risolutivo classico: infatti, anche il modello a sei vertici è generato dalla stessa matrice R_{XXZ} collegata alla catena XXZ tramite il *Quantum Inverse Scattering Method*.

Consideriamo il modello nel caso più generale (non nel limite omogeneo). Etichettiamo ciascuna colonna con il parametro α che può assumere i valori interi $1, \dots, M$ crescenti andando da destra verso sinistra; e contrassegniamo ciascuna riga con il parametro $\kappa = 1, \dots, M$ crescente spostandoci dall'alto verso il basso.

I tre pesi a, b, c vengono a dipendere dalla coppia (α, κ) . Scegliamo la seguente parametrizzazione⁴:

$$a_{\alpha, \kappa} = \sin(\lambda_\alpha - \nu_\kappa + \eta), \quad b_{\alpha, \kappa} = \sin(\lambda_\alpha - \nu_\kappa - \eta), \quad c_{\alpha, \kappa} = c = \sin(2\eta), \quad (5.5)$$

⁴Si noti che, sebbene c non dipenda esplicitamente dalla posizione, ciò che fisicamente è rilevante sono i rapporti a/c e b/c che invece non sono omogenei su tutto il reticolo

dove i *parametri spettrali* λ_α e ν_κ sono caratteristici rispettivamente di ciascuna colonna e di ciascuna riga.

Per collegarci al formalismo del *Bethe Ansatz* algebrico, conviene adesso identificare ciascuna freccia diretta verso l'alto o verso destra come uno stato *spin up* in un certo spazio di Hilbert isomorfo a \mathbb{C}^2 , e ciascuna freccia diretta verso il basso o verso sinistra come uno *spin down*.

Consideriamo il vertice (α, κ) come nella Figura 9:

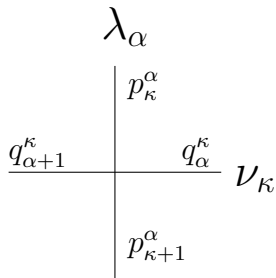


Figura 9

Le lettere q e p rappresentano le frecce sui *links*, rispettivamente, orizzontali e verticali adiacenti al vertice in considerazione. Pertanto possono assumere, nel linguaggio del *Bethe Ansatz* algebrico, i due possibili stati $|\uparrow\rangle$ o $|\downarrow\rangle$.

È possibile introdurre un opportuno operatore $L_{\alpha,\kappa}$, agente su uno spazio vettoriale isomorfo a \mathbb{C}^4 (ovvero al prodotto tensoriale di due distinti spazi di Hilbert di *spin*), tale che il peso di Boltzmann del vertice in esame possa essere scritto come:

$$x(\alpha, \kappa) = (\langle p_{\kappa+1}^\alpha | \otimes \langle q_{\alpha+1}^\kappa |) L_{\alpha,\kappa} (|p_\kappa^\alpha\rangle \otimes |q_\alpha^\kappa\rangle). \quad (5.6)$$

È immediato verificare che tale richiesta è soddisfatta dal seguente operatore:

$$(L_{\alpha,\kappa})_{p_{\kappa+1}^{\alpha} p_{\kappa}^{\alpha}} = \begin{pmatrix} a_{\alpha,\kappa} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{\alpha,\kappa} & c & 0 \\ 0 & c & b_{\alpha,\kappa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{\alpha,\kappa} \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

che, considerata la (5.5), non è altro che l'operatore di Lax (1.6) per $\lambda \rightarrow \lambda_{\alpha} - \nu_{\kappa}$. In altre parole, la famiglia (uno per ciascun vertice) di operatori (5.7) tende alla forma (1.6) nel limite omogeneo $\lambda_{\alpha} \rightarrow \lambda$, $\nu_{\kappa} \rightarrow 0$ ⁵. Si ha dunque una relazione profonda fra una catena XXZ e un modello a sei vertici che condividono lo stesso valore del parametro Δ .

Questa connessione è più generale: data una matrice $R = \phi L$ (con ϕ funzione scalare), questa può generare sia un modello quantistico di catena di *spin* unidimensionale che un modello classico su reticolo bidimensionale. Si hanno così relazioni analoghe fra la catena XXX e il modello a sei vertici nel regime $c^2 = (a - b)^2$ e fra la catena XYZ e il *modello a otto vertici*, una generalizzazione del sei vertici descritta ad esempio in [20].

Tornando al caso del modello a sei vertici, la funzione di partizione si può esprimere in funzione degli operatori di Lax (5.7). Consideriamo le condizioni al contorno che più ci interessano per il rapporto che intrecciano con la catena XXZ e con le ASM, cioè quelle a parete di dominio.

Questo equivale a fissare lo stato di $4M$ *spin*, quelli sui *links* più esterni. In

⁵A causa della simmetria righe-colonne del modello a sei vertici (si veda la sezione 6.6), è indifferente quale fra i due spazi di *spin*, verticale od orizzontale, identificare con lo spazio fisico della catena XXZ e quale con lo spazio ausiliario.

particolare, si ha:

$$\begin{aligned} |q_1^\kappa\rangle &= |\uparrow_{\text{hor},\kappa}\rangle & \forall \kappa \\ |q_{M+1}^\kappa\rangle &= |\downarrow_{\text{hor},\kappa}\rangle & \forall \kappa \\ |p_1^\alpha\rangle &= |\downarrow_{\text{ver},\alpha}\rangle & \forall \alpha \\ |p_{M+1}^\alpha\rangle &= |\uparrow_{\text{ver},\alpha}\rangle & \forall \alpha, \end{aligned}$$

dove gli indici hor, ver, κ , α individuano lo spazio di Hilbert, sottospazio di quello complessivo, in cui ciascun vettore si può scrivere come spin *up* (spin *down*).

La funzione di partizione si può scrivere nel seguente modo:

$$Z_{DWBC} = \left(\bigotimes_{\iota=1}^M \langle \downarrow_{\text{hor},\iota} | \otimes \bigotimes_{\beta=1}^M \langle \uparrow_{\text{ver},\beta} | \right) \left(\prod_{\alpha=1}^M \prod_{\kappa=1}^M L_{\alpha,\kappa} \right) \left(\bigotimes_{\iota=1}^M | \uparrow_{\text{hor},\iota} \rangle \otimes \bigotimes_{\beta=1}^M | \downarrow_{\text{ver},\beta} \rangle \right). \quad (5.8)$$

La doppia produttoria nel secondo fattore di questa espressione è da intendersi come un opportuno⁶ prodotto tensoriale (il risultato è un operatore che agisce su uno spazio di Hilbert isomorfo a \mathbb{C}^{4^M}), ordinato equivalentemente prima lungo le colonne e poi lungo le righe o viceversa:

$$\begin{aligned} \overleftarrow{\prod}_{\alpha=1}^M \overleftarrow{\prod}_{\kappa=1}^M L_{\alpha,\kappa} &= L_{MM} \dots L_{M2} L_{M1} \dots L_{1M} \dots L_{12} L_{11} \\ &= L_{MM} \dots L_{2M} L_{1M} \dots L_{M1} \dots L_{21} L_{11}. \end{aligned}$$

Scegliamo senza perdere in generalità di eseguire dapprima i prodotti lungo le colonne, e seguendo lo schema del *Bethe Ansatz* algebrico già descritto nel Capitolo

⁶Per motivi grafici si sono omessi nelle formule da (5.8) a (5.9) gli indici degli L , indicati invece esplicitamente nella (5.7). Tuttavia non c'è ambiguità: gli indici sono univocamente determinati dalla coppia (α, κ) , e a loro volta determinano il corretto algoritmo da eseguire nel calcolare i prodotti tensoriali: si veda l'Appendice A.

1 introduciamo⁷ la matrice di monodromia “verticale”:

$$T_\alpha(\lambda_\alpha, \vec{\nu}) = L_{\alpha,M} L_{\alpha,M-1} \cdots L_{\alpha,2} L_{\alpha,1} = \begin{pmatrix} A_\alpha & B_\alpha \\ C_\alpha & D_\alpha \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Poiché per definizione

$$\langle \uparrow_{\text{ver},\alpha} | T_\alpha | \downarrow_{\text{ver},\alpha} \rangle = B_\alpha,$$

si ha per la funzione di partizione:

$$Z_{DWBC} = \bigotimes_{\iota=1}^M \langle \downarrow_{\text{hor},\iota} | \prod_{\alpha=1}^M B_\alpha(\lambda_\alpha, \vec{\nu}) \bigotimes_{\iota=1}^M | \uparrow_{\text{hor},\iota} \rangle. \quad (5.10)$$

Naturalmente con il *Bethe Ansatz* algebrico si può anche ritrovare la soluzione per condizioni al contorno toroidali: in questo caso anziché calcolare la funzione di partizione (5.8) si dovrà operare una doppia operazione di traccia, prima sulle matrici di monodromia verticali (ottenendo così una matrice di trasferimento per ciascuna colonna) e quindi sulla produttoria delle M matrici di trasferimento.

L'espressione (5.10) per la funzione di partizione con DWBC soddisfa una formula per ricorrenza con cui si riesce ad esprimere $Z(M)$ in funzione di $Z(M-1)$ (si vedano [7], [36]).

Risolvendo questa relazione si ottiene per Z_{DWBC} la formula detta *determinante di Izergin-Korepin*, dimostrata per la prima volta in [38]:

$$Z(M; \vec{\lambda}, \vec{\nu}, \eta) = \frac{\prod_{1 \leq \alpha, \kappa \leq M} (a_{\alpha,\kappa} b_{\alpha,\kappa})}{\prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq M} \sin(\lambda_\beta - \lambda_\alpha) \prod_{1 \leq \kappa < \iota \leq M} \sin(\nu_\kappa - \nu_\iota)} \times \det \left[\frac{c}{a_{\alpha,\kappa} b_{\alpha,\kappa}} \right]_{1 \leq \alpha, \kappa \leq M}, \quad (5.11)$$

con $a_{\alpha,\kappa}$, $b_{\alpha,\kappa}$ e c definiti dalla (5.5).

Nel limite omogeneo $\lambda_\alpha \rightarrow \lambda$, $\nu_\kappa \rightarrow 0$, l'espressione (5.11) non è singolare perché ogni polo nel prefattore dovuto all'uguaglianza fra due parametri spettrali di riga (o

⁷Per semplicità di scrittura nelle equazioni (5.9)-(5.10) abbiamo introdotto la notazione $\vec{\nu} = \{\nu_\kappa\}$.

colonna) è compensato dall'uguaglianza di due righe (o colonne) del determinante.

Il calcolo del limite dà:

$$Z_{DWBC}^{hom}(M; \lambda, \eta) = \frac{[a(\lambda, \eta)b(\lambda, \eta)]^{M^2}}{\prod_{j=1}^{M-1} (k!)^2} \det \left[\frac{\partial^{j+k-2}}{\partial \lambda^{j+k-2}} \frac{c}{a(\lambda, \eta)b(\lambda, \eta)} \right]_{1 \leq j, k \leq M}, \quad (5.12)$$

con a , b e c definiti dalla (4.11) (con $\rho = 1$).

Capitolo 6

Considerazioni sulle congetture di Razumov–Stroganov

6.1 Motivazioni dello studio

Nel loro articolo [10] Razumov e Stroganov hanno messo in relazione due oggetti apparentemente privi di un collegamento: la catena di *spin* e le matrici a segno alterno.

Tuttavia, esiste un naturale ponte fra i due campi di studio, ed è dato dal modello a sei vertici con DWBC, che presenta delle relazioni matematiche con entrambi.

Forti di questa considerazione siamo andati ad investigare le prime tre congetture nel formalismo del modello a sei vertici, sfruttando le corrispondenze che abbiamo esposto nella sezione 5.3 e nella sezione 5.4.

In questo capitolo ci specializzeremo sempre, parlando della catena di Heisenberg XXZ, al caso considerato da Razumov e Stroganov (numero dispari di siti, condizioni al contorno periodiche, e $\Delta = -1/2$).

6.2 Considerazioni preliminari

In questa sezione ci proponiamo di sintetizzare il ragionamento sottostante le congetture di Razumov–Stroganov e di porre le basi per ulteriori indagini in proposito.

Il modello a otto vertici è una generalizzazione del sei vertici in cui la *ice rule* è indebolita richiedendo che il numero di frecce entranti in ciascun vertice sia pari. È così ammesso un quarto tipo di vertice, caratterizzato da frecce tutte uscenti o tutte entranti, a cui si assegna peso di Boltzmann d^1 . La costruzione dello stato di Razumov–Stroganov si basa su una proprietà generale di questo modello: in [50], Baxter ha notato che quando i pesi di Boltzmann soddisfano la condizione $(a^2 + ab)(b^2 + ab) = (c^2 + ab)(d^2 + ab)$ la matrice di trasferimento per il modello a otto vertici su un reticolo $M \times M$ ha il particolare autovalore

$$\theta_{\text{Baxter}} = -(-a - b)^M. \quad (6.1)$$

Tornando a specializzarci al caso del modello a sei vertici ($d = 0$), la condizione sui pesi si semplifica a $\Delta = -1/2$.

Poiché la matrice di trasferimento associata alla catena XXZ è la stessa di quella del modello a sei vertici (si veda la sezione 5.4), ponendo $\eta = \frac{\pi}{3}$ nell'equazione (1.29) si evince che esiste per l'Hamiltoniana (3.1) un'autoenergia pari a $-\frac{3}{2}M$.

Consideriamo un modello a sei vertici su reticolo $(2m + 1) \times (2m + 1)$ e con parametro di *crossing* $\eta = \frac{\pi}{3}$. Ad esso sono associate le corrispondenti equazioni T-Q (4.13), le quali hanno in generale 2^{2m+1} soluzioni indipendenti. Fra tutte queste, vogliamo considerare in particolare quelle corrispondenti all'autovalore (6.1).

Per $M = 2m + 1$, con l'usuale parametrizzazione (4.11) (con $\rho = 1$) possiamo scrivere la (6.1) come $\sin^M(\lambda)$. Di conseguenza la particolare equazione T-Q di

¹In questa sezione consideriamo sempre il limite omogeneo.

nostro interesse è

$$\sin^M(\lambda)q(\lambda) = \sin^M\left(\lambda - \frac{\pi}{3}\right)q\left(\lambda + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin^M\left(\lambda + \frac{\pi}{3}\right)q\left(\lambda - \frac{2\pi}{3}\right). \quad (6.2)$$

Ci sono due soluzioni [11]: \tilde{q}_m , un polinomio di Baxter con m radici, e \tilde{p}_{m+1} , con $m + 1$ radici. Nel seguito, chiameremo \tilde{q}_m *polinomio di Baxter–Stroganov*² e ci riferiremo alle sue radici con l'espressione *radici di Bethe–Stroganov*. Con *polinomio di Baxter–Stroganov oltre l'equatore* e *radici di Bethe–Stroganov oltre l'equatore* indicheremo invece, rispettivamente, \tilde{p}_{m+1} e le sue radici.

L'autostato della catena XXZ generato dalle radici di Bethe–Stroganov è proprio uno dei due stati di Razumov–Stroganov (precisamente quello con $s^z = \frac{1}{2}$), candidati a essere lo stato fondamentale e ad avere le caratteristiche descritte nelle congetture (si veda il Capitolo 3).

Notiamo subito che il valore $s^z = +1/2$ dell'autovalore della magnetizzazione è un semplice corollario del fatto che il polinomio di Baxter–Stroganov ha m radici (l'autostato simmetrico con $s^z = -1/2$ è generato dalle radici di Bethe–Stroganov oltre l'equatore). Anche l'autovalore del momento totale $P = 0$ può essere dedotto facilmente da quanto detto finora e dalla (1.34).

L'ipotesi che lo stato di Razumov–Stroganov sia quello fondamentale non è ancora dimostrata; a supporto di questa congettura ci sono indizi numerici [10] e considerazioni fisiche. Per quanto riguarda queste ultime, notiamo che possiamo aspettarci³ uno stato fondamentale caratterizzato da una distribuzione simmetrica e compatta intorno all'origine dei momenti (1.26), e quindi $P = 0$. Neanche $s_z = \pm\frac{1}{2}$ è una sorpresa, per analogia con il caso M pari in cui lo stato fondamentale è caratterizzato da $s_z = 0$.

²Aggiungeremo a volte la locuzione *sopra l'equatore*, che ometteremo invece nei casi privi di rischi di ambiguità con la soluzione *oltre l'equatore*.

³Si veda la relazione di dispersione (1.33).

Chiudiamo questa sezione con qualche considerazione sui momenti di singola particella associati alle radici di Bethe–Stroganov.

Anzitutto si può dimostrare (si veda l'Appendice C) che questi compaiono o in coppie di momenti reali della forma $(p, -p)$ o in quartetti di momenti complessi della forma $(p, -p, p^*, -p^*)$, più eventualmente un singolo momento nullo.

Nell'ipotesi che lo stato in considerazione sia quello fondamentale, inoltre, ci possiamo attendere (esiste in effetti anche una dimostrazione rigorosa, pubblicata da Yang e Yang in [51]) che i numeri quantici definiti dall'equazione (1.28) si distribuiscono in modo compatto intorno all'origine⁴.

Sotto questa ipotesi i momenti sono tutti reali e di modulo minore di 2η , e le radici di Bethe–Stroganov compaiono a coppie $\lambda_{\pm} = \frac{\pi}{2} \pm i\Lambda$, più eventualmente una singola radice $\lambda_0 = \frac{\pi}{2}$ se m è dispari.

6.3 Correlatori di bordo e funzioni generatrici

Consideriamo un modello a sei vertici con DWBC su un reticolo $N \times N$.

Introduciamo, seguendo [52], il correlatore di bordo ad un punto⁵ $H_N(r)$, con $r = 1, 2, \dots, N$, definendolo come la probabilità che il vertice posto sulla prima riga (contando a partire dall'alto) e sulla r -esima colonna (da destra) sia di tipo 6.

La definizione in termini di operatori è

$$H_N(r) := \frac{1}{4} Z_N^{-1} \langle \Downarrow | B(\lambda_N) \dots B(\lambda_{r+1}) (1 - \sigma_1^z) B(\lambda_r) (1 + \sigma_1^z) B(\lambda_{r+1}) \dots B(\lambda_1) | \Uparrow \rangle. \quad (6.3)$$

Alcune proprietà di $H_N(r)$ seguono immediatamente dalla definizione.

A causa delle condizioni al contorno e della *ice rule*, in ciascuno stato necessa-

⁴Cioè $I_j = 0, \pm 1, \dots, \pm \frac{m-1}{2}$ per m dispari, e $I_j = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots, \pm \frac{m-1}{2}$ per m pari.

⁵Qua e nel seguito abbiamo sottointeso per semplicità di notazione la dipendenza degli H dai parametri spettrali $\{\lambda_j\}$ e da η . In generale naturalmente gli H dipendono anche dai parametri spettrali di riga $\{\nu_k\}$, ma i calcoli di nostro interesse saranno svolti tutti nel regime in cui si è già eseguito il limite omogeneo $\nu_k \rightarrow 0$; viceversa, salvo quando diversamente specificato, manterremo la disomogeneità sui parametri di riga.

riamente uno e uno solo degli N vertici della prima riga è di questo tipo: quindi $\sum_{r=1}^N H_N(r) = 1$.

Se ci specializziamo per un attimo al limite omogeneo $\lambda_j \rightarrow \lambda, \nu_k \rightarrow 0$, ricordando (sezione 5.3) la corrispondenza biunivoca con le matrici a segno alterno, possiamo scrivere

$$H_N \left(r, \lambda = \frac{\pi}{2}, \eta = \arcsin \left(\frac{\sqrt{x}}{2} \right) \right) = \frac{A(N, r; x)}{A(N; x)}. \quad (6.4)$$

Ad esempio per $\eta = \frac{\pi}{3}$ i correlatori a un punto nel limite omogeneo non sono altro, a meno della normalizzazione, che la 3-enumerazione raffinata delle ASM.

Nel caso ancor più specifico in cui $a = b$ (cioè quando $\lambda = \frac{\pi}{2}$) si ha che il modello è invariante per riflessione rispetto all'asse verticale di simmetria del disegno, e dunque $H_N(r) = H_N(N + 1 - r)$.

La funzione generatrice dei correlatori a un punto è così definita:

$$h_N(y) := \sum_{r=1}^N H_N(r) y^{r-1}. \quad (6.5)$$

Fissato un valore di riferimento per i parametri spettrali λ introduciamo poi le variabili

$$t := \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}, \quad u_j := u(\lambda, \lambda_j) = \frac{1}{t} \frac{b(\lambda_j)}{a(\lambda_j)}. \quad (6.6)$$

L'utilità delle variabili t e $\{u_j\}$ ed il significato di λ saranno chiariti nelle prossime sezioni.

Notiamo per ora che $\lambda_j = \lambda$ implica $u_j = 1$: ci sarà utile nel seguito.

6.4 Prima congettura

Mediante gli strumenti matematici da noi introdotti possiamo dare una dimostrazione alternativa del fatto che l'energia dello stato di Razumov–Stroganov è

$$E = -\frac{3M}{2}.$$

Consideriamo un modello a sei vertici su un reticolo $(2m + 1) \times (2m + 1)$, nel limite omogeneo, con parametro spettrale ζ , parametro di *crossing* $\eta = \frac{\pi}{3}$ e condizioni al contorno periodiche. Prendiamo in considerazione il corrispondente polinomio di Baxter–Stroganov.

Partiamo dalla seguente relazione dovuta a Stroganov (si veda [53]):

$$h_{m+1} \left(-u; \lambda = \frac{\pi}{2}, \eta = \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\tilde{q}_m(\zeta(u))}{\prod_{j=1}^m \sin(-\lambda_j)}, \quad (6.7)$$

con

$$\zeta(u) := \frac{i}{2} \ln \frac{1 - \omega u}{\omega - u}. \quad (6.8)$$

Nell'equazione (6.7), h_{m+1} è la funzione generatrice definita nella (6.5) e calcolata all'*Ice Point*; $q_m(\zeta)$ è il polinomio di Baxter–Stroganov visto come funzione del parametro ζ ; e le $\{\lambda_j\}$ sono le sue radici di tale polinomio. Nella definizione della relazione funzionale (6.8) si è usato il simbolo $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Siano ora $\{u_j\}$ le variabili definite ponendoci stavolta al *Dual Ice Point* (ovvero $\lambda = \frac{\pi}{2}, \eta = \frac{\pi}{3}$) nella (6.6). Da quest'ultima relazione e dalla (6.8) si ottiene

$$\alpha(u_j) = \lambda_j.$$

Poiché il polinomio di Baxter–Stroganov $q_m(\zeta)$ si annulla per $\zeta = \lambda_j$ ($j = 1, \dots, m$), anche per la funzione generatrice potremo scrivere, sfruttando la (6.7):

$$\sum_{r=1}^{m+1} c_{r-1} u^{r-1} = h_{m+1}(-u) = (-1)^m \frac{A_m}{A_{m+1}} \prod_{j=1}^m (u - u_j).$$

Dalla definizione della funzione generatrice e dalla simmetria $s \leftrightarrow m + 1 - s$ del correlatore $H_{m+1}(s)$ calcolato all'*Ice Point* segue che il coefficiente di u^{r-1} è $c_{r-1} = (-1)^{r-1} H_{m+1}(m + 2 - r)$.

Dalla precedente equazione possiamo dedurre:

$$\sum_{j=1}^m u_j = -\frac{c_{m-1}}{c_m} = \frac{H_{m+1}(2)}{H_{m+1}(1)} = \frac{m+1}{2}. \quad (6.9)$$

Per l'ultima eguaglianza abbiamo sfruttato le relazioni (6.4) e (2.7), che permettono di scrivere $H_{m+1}(r, \lambda = \frac{\pi}{2}, \eta = \frac{\pi}{6}) = \frac{\binom{m+r-1}{m} \binom{2m+1-r}{m}}{\binom{3m+1}{m}}$.

Dalle (1.26) e (6.6) si ha che nel caso in esame $u_j = e^{-ip_j}$. Data la simmetria nella distribuzione degli impulsi⁶, le parti immaginarie degli esponenziali si cancellano e risulta $\sum_j u_j = \sum_j \cos(p_j)$.

D'altro canto, sappiamo dalla (1.33) che per $\Delta = -1/2$ si ha per l'energia $E = 1/2 - m - 4 \sum_j \cos(p_j)$. Pertanto, usando la (6.9) si può concludere:

$$E = -\frac{3}{2}(2m+1), \quad (6.10)$$

ottenendo il valore congetturato da Razumov e Stroganov.

6.5 Autostati e prodotti scalari

Il linguaggio del QISM applicato al modello a sei vertici, che abbiamo sviluppato nel capitolo 4, risulta particolarmente utile per esprimere graficamente prodotti scalari fra stati della catena XXZ.

Gli autostati dell'Hamiltoniana, calcolati secondo il Teorema 1, costituiscono una base ortogonale completa per lo spazio \mathcal{H} . In letteratura la completezza è stata discussa a lungo, e in particolare sono state sollevate obiezioni per gli stati *oltre l'equatore* e per i casi patologici in cui e^{in} è una radice dell'unità. Una parola

⁶Una distribuzione simmetrica degli impulsi intorno all'origine è garantita *a priori* perché si può dimostrare con considerazioni analitiche (si veda l'Appendice C) che il polinomio di Baxter-Stroganov è pari. In ogni caso che $\sum_j \sin p_j = 0$ è comunque verificato *a posteriori* dal fatto che $\sum_j u_j$ è reale, come abbiamo trovato.

Questo tuttavia non è sufficiente per concludere che lo stato in considerazione sia necessariamente quello fondamentale, perché esistono anche stati eccitati con questa caratteristica.

definitiva in proposito l'ha spesa Baxter, che nel suo articolo [54] ha mostrato come superare le problematiche relative a questi casi particolari. Garantita dunque la completezza della base, è sufficiente conoscere la rappresentazione grafica degli autostati calcolati tramite il *Bethe Ansatz* algebrico (qualsiasi altro stato potrà difatti venire espresso come loro combinazione lineare).

Analizziamo una catena con M siti reticolari. I due autostati più semplici sono lo stato di vuoto $|0\rangle = |\uparrow\rangle$ e il suo simmetrico per inversione di tutti gli *spin*, $|\downarrow\rangle$. È immediato identificare $|0\rangle$ con $\prod_{j=1}^M |\uparrow_{\text{hor},j}\rangle$ (una colonna di *links* orizzontali occupati da frecce verso destra), e viceversa far corrispondere a $|\downarrow\rangle$ una colonna di *links* orizzontali con frecce verso sinistra, cioè $\prod_{j=1}^M |\downarrow_{\text{hor},j}\rangle$.

Una rappresentazione per gli altri autostati può essere data sfruttando il Teorema 1, costruendoli cioè così:

$$|\Omega_m(\{\lambda_j\})\rangle = \prod_{j=1}^m B(\lambda_j)|0\rangle, \quad (6.11)$$

con i $\{\lambda_j\}$ che devono soddisfare le equazioni di Bethe (1.23).

Difatti, richiamando la trattazione svolta nella sezione 5.4, anche per l'operatore $B(\lambda_j)$ c'è una interpretazione semplice; si tratta di uno dei quattro elementi di una matrice di monodromia verticale, con parametro spettrale di colonna λ_j , e avendo fatto tendere in un limite omogeneo parziale tutti i parametri spettrali di riga ν_k a zero. Scegliere fra i quattro elementi proprio B significa fissare la direzione delle frecce nei due *links* verticali agli estremi: in particolare corrisponde a fissarle entrambe entranti. Infatti, B è l'elemento che si trova sulla prima riga (il che, per come abbiamo costruito la matrice di monodromia, significa che la direzione della freccia sul *link* verticale inferiore è fissata verso l'alto) e sulla seconda colonna (freccia sul *link* verticale superiore fissata verso il basso).

Nella Figura 10 riportiamo l'interpretazione grafica non solo di $B(\lambda_j)$ ma anche degli altri tre elementi della matrice di monodromia verticale, per il caso $M=5$.

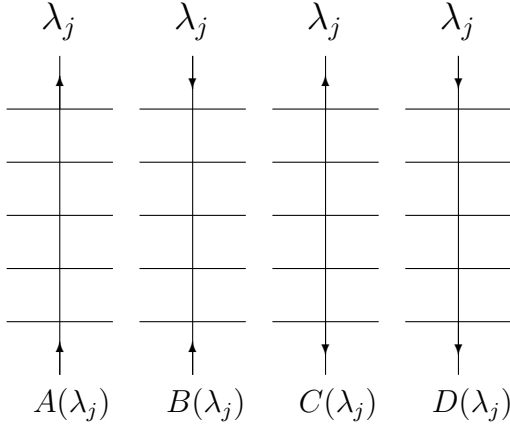


Figura 10

È opportuno un commento su quei *links* su cui non si sono disegnate frecce.

La matrice di monodromia proviene dalla costruzione (5.9), in cui prodotti tensoriali vanno eseguiti secondo le prescrizioni date dagli indici come nella (5.7).

Gli indici della T_α si possono esprimere esplicitamente così:

$$(T_\alpha)_{\vec{q}_{\alpha+1}\vec{q}_\alpha}^{p_{M+1}^\alpha p_1^\alpha},$$

dove si è utilizzato per comodità di notazione il simbolo \vec{q}_β per indicare il multiindice $(q_\beta^M, \dots, q_\beta^2, q_\beta^1)$.

La definizione di T_α impone di sommare su tutti gli indici interni p_j^α (con $j = M, M - 1, \dots, 2$) e di eseguire prodotti tensoriali sugli altri indici. Anche nella rappresentazione della Figura 10 si deve pertanto sottointendere una sommatoria su tutti i possibili stati dei *links* verticali compresi fra i due fissati.

Abbiamo già detto che fissare gli indici p della matrice di monodromia corrisponde a scegliere uno dei suoi quattro elementi-operatori, cioè a fissare lo stato delle due frecce sui *links* verticali esterni; i multi-indici \vec{q} invece corrispondono ai possibili stati dei $2M$ *links* orizzontali di ciascuno dei quattro operatori disegnati nella Figura 10. Fissandoli si determina cioè un elemento particolare fra i 2^{2M} di ciascun operatore (molti dei quali naturalmente sono nulli, cioè corrispondenti a

una configurazione dei sei vertici su reticolo $M \times 1$ proibita dalla *ice rule*).

Siamo adesso pronti per rappresentare graficamente uno degli autostati (6.11): per quanto appena notato e per come abbiamo rappresentato lo stato $|0\rangle$, infatti, è chiaro che applicare un operatore B allo stato di vuoto significa fissare la direzione delle frecce a destra disegnandole tutte uscenti. Nella Figura 11 ad esempio abbiamo rappresentato uno stato con $M = 5, m = 2$. Si noti che, dato che il parametro ν non compare nel Teorema 1, si è eseguito un limite omogeneo parziale sui parametri spettrali di riga, facendoli tendere a 0.

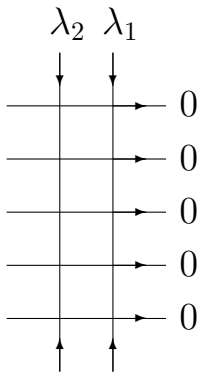


Figura 11

Come si può vedere dalla Figura 11, un autostato della catena XXZ corrisponde ad un reticolo (rettangolare, in generale) del modello a sei vertici in cui sono state parzialmente fissate delle condizioni al contorno (su tre dei quattro lati), e in cui si è eseguito un limite omogeneo sui parametri spettrali di riga e si sono scelti come parametri spettrali di colonna le soluzioni alle equazioni di Bethe (1.25). Si sottintende una sommatoria su tutti i possibili stati dei *links* interni.

Se, infine, si fissa lo stato dei *links* orizzontali all'estrema sinistra, si ottiene l'equivalente di applicare a sinistra un vettore dello spazio duale (un *bra* nella notazione di Dirac) allo stato considerato: si ha cioè una rappresentazione nel linguaggio del modello a sei vertici di un prodotto scalare fra autostati della catena

XXZ.

Ad esempio, si può applicare come abbiamo fatto nella Figura 12 lo stato $\langle \Downarrow |$, ottenendo per il prodotto scalare niente altro che (si veda l'equazione 5.10) la funzione di partizione per un reticolo con DWBC!

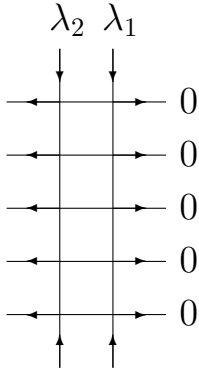


Figura 12

Notiamo per concludere questa sezione che per il reticolo 2×5 con DWBC, ovvero per la Figura 12, la funzione di partizione è 0, perché non è possibile trovare neanche una configurazione dei *links* interni che rispetti la *ice rule*. Abbiamo in altre parole dimostrato usando il formalismo del modello a sei vertici l'ortogonalità di questi due autostati per $M = 5$:

$$\langle \Downarrow | \Omega_2(\lambda_1, \lambda_2) \rangle = 0 \quad \forall \{\lambda_1, \lambda_2\}.$$

La stessa impossibilità di trovare configurazioni valide per un reticolo del tipo della Figura 12 vale in generale per ogni M e ogni $m < M$ e si ritrova quindi un risultato ovvio nel linguaggio della XXZ, confermando la bontà della nostra traduzione fra i due modelli.

Per $M = m$ naturalmente il prodotto scalare non fa più zero, e sfrutteremo proprio questo fatto per esprimere formulazioni equivalenti alla seconda e alla terza congettura di Razumov–Stroganov nel formalismo del modello a sei vertici.

6.6 Seconda congettura

Fissiamo a $2m + 1$ il numero di siti reticolari della catena di *spin*.

Fra i 2^{2m+1} autostati dell'Hamiltoniana ci sono naturalmente anche i due stati di Razumov–Stroganov. Consideriamo senza perdere in generalità quello con $s^z = \frac{1}{2}$; in virtù del Teorema 1, possiamo scriverlo così:

$$|\Psi_1\rangle = \prod_{j=1}^m B(\lambda_j) |\uparrow\rangle, \tag{6.12}$$

dove le $\{\lambda_j\}$ sono le radici di Bethe–Stroganov.

L'apparato che abbiamo introdotto si presta a tradurre nel linguaggio del modello a sei vertici la seconda congettura di Razumov–Stroganov.

Questa mette in relazione due diversi coefficienti dello stato fondamentale; in particolare si ipotizza che

$$\frac{\langle \overbrace{\uparrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \dots \uparrow \downarrow}^{2m} | \Psi_1 \rangle}{\langle \underbrace{\uparrow \dots \uparrow}_{m+1} \underbrace{\downarrow \dots \downarrow}_m | \Psi_1 \rangle} = A_m. \tag{6.13}$$

Consideriamo per primo il denominatore dell'espressione a sinistra della precedente equazione.

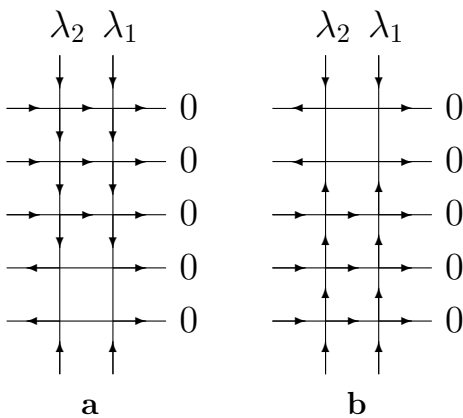


Figura 13

Si osservi la Figura 13a che esemplifica il concetto nel caso $M = 5$: oltre alle

frecce sui *links* più esterni, fissate dalle condizioni al contorno, abbiamo disegnato anche quelle frecce la cui direzione è necessariamente determinata dalla *ice rule*. Il prodotto scalare $\langle \underbrace{\uparrow \dots \uparrow}_{m+1} \underbrace{\downarrow \dots \downarrow}_m | \Psi_1 \rangle$ è interpretabile come il prodotto della funzione di partizione di un reticolo $m \times m$ con DWBC per una serie di coefficienti uguali ad opportune (nello specifico, $(m+1)$ -esime) potenze del parametro b calcolato in ciascuna delle radici di Bethe.

In sintesi,

$$\langle \underbrace{\uparrow \dots \uparrow}_{m+1} \underbrace{\downarrow \dots \downarrow}_m | \Psi_a \rangle = Z_m(\{\lambda_j\}) \prod_{j=1}^m (b(\lambda_j))^{m+1}. \quad (6.14)$$

In effetti, la formula (6.14) continua ad essere valida anche se si sostituisce a ciascun $b(\xi)$ il corrispondente $a(\xi)$. L'equivalenza può essere dimostrata in due modi. Geometricamente (Figura 13b): poiché il coefficiente di $|\underbrace{\uparrow \dots \uparrow}_{m+1} \underbrace{\downarrow \dots \downarrow}_m\rangle$ deve essere uguale al coefficiente di $|\underbrace{\downarrow \dots \downarrow}_m \underbrace{\uparrow \dots \uparrow}_{m+1}\rangle$, si vede facilmente che si può ottenere una analoga rappresentazione nel linguaggio del modello a sei vertici in cui compaiono come coefficienti gli a anziché i b .

Oppure algebricamente: supponiamo per semplicità che le $\{\lambda_j\}$ siano radici di Bethe per lo stato fondamentale⁷; allora esse compariranno a coppie $\lambda_{\pm} = \frac{\pi}{2} \pm i\Lambda$, più una eventuale radice singola $\lambda_0 = \frac{\pi}{2}$. Poiché però $a(\lambda_{\pm}, \eta) = b(\lambda_{\mp}, \eta)$ e $a(\frac{\pi}{2}, \eta) = b(\frac{\pi}{2}, \eta)$, otteniamo nuovamente l'equivalenza fra a e b nella formula (6.14).

Per quanto riguarda invece il numeratore nella espressione a sinistra dell'equazione (6.13), possiamo interpretarlo graficamente come nella Figura 14 (in cui nuovamente si è scelto come esempio il caso $m = 2 \leftrightarrow M = 5$):

⁷Non è una restrizione necessaria, ma è utile a semplificare la dimostrazione: l'estensione al caso più generale è comunque banale date le proprietà delle radici di Bethe–Stroganov elencate nell'Appendice C.

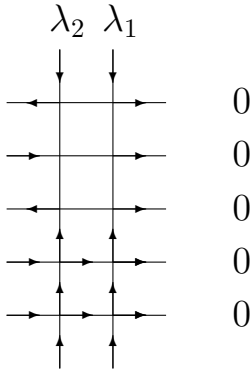


Figura 14

Formalmente possiamo definire:

$$\langle \overbrace{\uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \dots \uparrow \downarrow}^{2m} | \Psi_a \rangle =: \tilde{Z}_{2m+1,m}(\{\lambda_j\}) \tag{6.15}$$

dove con $\tilde{Z}_{n,n'}$ indichiamo la funzione di partizione di un modello a sei vertici su reticolo $n \times n'$ con le particolari condizioni al contorno fissate come nella Figura 14.

Dunque la seconda congettura è equivalente a

$$\tilde{Z}_{2m+1,m}(\{\lambda_j\}) = A_m Z_m(\{\lambda_j\}) \prod_{j=1}^m (a(\lambda_j))^{m+1}. \tag{6.16}$$

Purtroppo, la presenza della \tilde{Z} nella (6.16) è un ostacolo rilevante, in quanto per il particolare tipo di condizioni al contorno fisse disegnate nella Figura 14 non esiste un'espressione chiusa analoga alla (5.11) o alla (5.12) nel caso omogeneo.

Per cercare di uscire dall'*impasse* si può sfruttare la simmetria fra righe e colonne del modello a sei vertici. Questa è evidente sia algebricamente (nel formalismo della sezione 5.4 avremmo potuto equivalentemente definire una matrice di monodromia "orizzontale" in luogo di quella "verticale" della (5.9)) che graficamente: per ottenerla si può ad esempio ruotare di 90° il piano del disegno, applicare una simmetria rispetto ad un asse verticale o orizzontale ed infine invertire la direzione

di tutte le frecce.

Ad esempio la Figura 14 è equivalente alla Figura 15:

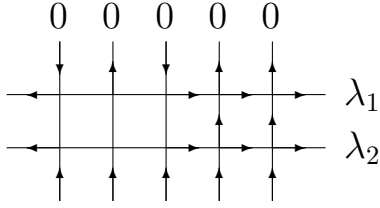


Figura 15

Osservando la Figura 15 si può scrivere:

$$\tilde{Z}_{2m+1,m}(\{\lambda_j\}) = \langle \Downarrow |BABAB \dots AB| \Uparrow \rangle \prod_{j=1}^m (a(\lambda_j))^2, \quad (6.17)$$

Gli m operatori B e gli $m - 1$ operatori A della formula (6.17) agiscono su uno spazio vettoriale isomorfo a \mathbb{C}^{2^m} e sono tutti calcolati negli stessi parametri spettrali di riga $\{\lambda_\alpha\}$ e parametri di colonna $\{\nu_\kappa\} \equiv 0$.

L'equazione (6.17) concede qualche speranza di essere trattata. Infatti, un modello a sei vertici come quello della Figura 15, con parametri di spettrali di colonna $\{\nu_\kappa\}$ (che manderemo poi a 0 mediante il limite omogeneo) e parametri spettrali di riga $\{\lambda_\alpha\}$ è associato a un operatore di Lax definito come nella (5.7). Valgono equazioni analoghe alle (1.7), (1.8):

$$[L_{\alpha\kappa}(\nu_\alpha - \lambda_\kappa), L_{\beta\kappa}(\nu_\beta - \lambda_\kappa)] = 0 \quad \forall \alpha \neq \beta, \quad (6.18)$$

$$\tilde{R}(\nu_\alpha, \nu_\beta)(L_{\alpha\kappa}(\nu_\alpha - \lambda_\kappa) \otimes L_{\beta\kappa}(\nu_\beta - \lambda_\kappa)) = (L_{\beta\kappa}(\nu_\beta - \lambda_\kappa) \otimes L_{\alpha\kappa}(\nu_\alpha - \lambda_\kappa))\tilde{R}(\nu_\alpha, \nu_\beta). \quad (6.19)$$

Le (6.18)–(6.19) implicano la seguente relazione⁸ per la matrice di monodromia

⁸Per ragioni di chiarezza grafica nella (6.20) si sono utilizzati per i parametri spettrali i simboli $\vec{\nu}, \vec{\lambda}$ in luogo dei consueti $\{\nu_\kappa\}, \{\lambda_\alpha\}$.

(5.9):

$$\tilde{R}(\nu_\alpha, \nu_\beta)(T_\alpha(\nu_\alpha, \vec{\lambda}) \otimes T_\beta(\nu_\beta, \vec{\lambda})) = (T_\beta(\nu_\beta, \vec{\lambda}) \otimes T_\alpha(\nu_\alpha, \vec{\lambda}))\tilde{R}(\nu_\alpha, \nu_\beta). \quad (6.20)$$

L'equazione tensoriale (6.20) corrisponde a 16 equazioni scalari.

In particolare una di queste è:

$$B(\mu)A(\nu) = f_{xxz}(\mu, \nu)A(\nu)B(\mu) + g_{xxz}(\nu, \mu)A(\mu)B(\nu), \quad (6.21)$$

con f_{xxz} e g_{xxz} definite dalla (1.11).

Tramite la regola di commutazione (6.21) si può tentare di ottenere un risultato per la funzione di partizione (6.17). Occorre poi eseguire un limite omogeneo perché gli operatori A e B vanno calcolati per valori identici dei parametri spettrali (in particolare siamo interessati a calcolarli in $(\{\nu_\kappa \equiv 0\}, \{\lambda_\alpha\})$ con $\{\lambda_\alpha\}$ set di soluzioni di Bethe–Stroganov). In questo limite si ottengono formule in cui compaiono le derivate di A e B rispetto al parametro spettrale di colonna; la difficoltà tecnica è però notevole e per il momento non siamo riusciti ad ottenere una formula chiusa.

6.7 Terza congettura

Non sarà sfuggito che, quando nel Capitolo 1 abbiamo introdotto il QISM per la catena XXZ, scegliendo lo stato di vuoto abbiamo arbitrariamente rotto la simmetria partendo da uno stato con tutti *spin up*.

Tuttavia dal punto di vista fisico la simmetria rimane intatta e pertanto nulla, *mutatis mutandis*, vieta di fare la scelta opposta. In altre parole, gli autostati dell'Hamiltoniana si possono ottenere, oltre che nel solito modo, applicando operatori C allo stato $|\Downarrow\rangle$, sempre con la prescrizione che i parametri spettrali da cui dipendono gli operatori di distruzione soddisfino le equazioni di Bethe.

Consideriamo in particolare lo stato di Razumov–Stroganov con $s^z = +1/2$ per numero di siti $M = 2m + 1$; per quanto detto, questo può essere calcolato in due modi, a meno della normalizzazione:

$$|\Psi_1\rangle = \prod_{j=1}^m B(\lambda_j) |\uparrow\rangle, \quad (6.22)$$

oppure

$$|\Psi_2\rangle = \prod_{k=1}^{m+1} C(\mu_k) |\downarrow\rangle, \quad (6.23)$$

dove le m $\{\lambda_j\}$ sono soluzioni di Bethe–Stroganov e le $m + 1$ $\{\mu_k\}$ sono soluzioni di Bethe–Stroganov oltre l’equatore.

La corretta normalizzazione si ottiene dividendo per $\langle \underbrace{\uparrow \dots \uparrow}_{m+1} \underbrace{\downarrow \dots \downarrow}_m | \Psi_x \rangle$ ($x = 1, 2$).

In particolare, poiché nel caso in esame il vettore duale di $C(\mu_k) |\downarrow\rangle$ è uguale a $\langle \downarrow | B(\mu_k)^9$, possiamo esprimere il quadrato della norma dello stato di Razumov–Stroganov nel seguente modo:

$$\mathcal{N}^2(m) = \frac{\langle \downarrow | \prod_{k=1}^{m+1} B(\mu_k) \prod_{j=1}^m B(\lambda_j) | \uparrow \rangle}{\langle \underbrace{\uparrow \dots \uparrow}_{m+1} \underbrace{\downarrow \dots \downarrow}_m | \Psi_2 \rangle \langle \underbrace{\uparrow \dots \uparrow}_{m+1} \underbrace{\downarrow \dots \downarrow}_m | \Psi_1 \rangle}. \quad (6.24)$$

Nel numeratore di questa espressione riconosciamo (si veda la sezione 5.4) la funzione di partizione del modello a sei vertici su reticolo quadrato $(2m + 1) \times (2m + 1)$, nel limite omogeneo per i parametri spettrali di riga e avente i due insiemi di radici di Bethe–Stroganov e di radici di Bethe–Stroganov *oltre l’equatore* come parametri spettrali di colonna.

Per quanto riguarda il denominatore, abbiamo già analizzato nella sezione 6.6 il fattore $\langle \underbrace{\uparrow \dots \uparrow}_{m+1} \underbrace{\downarrow \dots \downarrow}_m | \Psi_1 \rangle$.

⁹Si veda l’Appendice B per la dimostrazione

Per l'interpretazione del fattore $\langle \underbrace{\uparrow \dots \uparrow}_{m+1} \underbrace{\downarrow \dots \downarrow}_m | \Psi_2 \rangle$ si osservino invece le Figure 15a e 15b, ottenute con la consueta traduzione dal linguaggio della catena a quello del sei vertici più l'inversione di tutte le frecce.

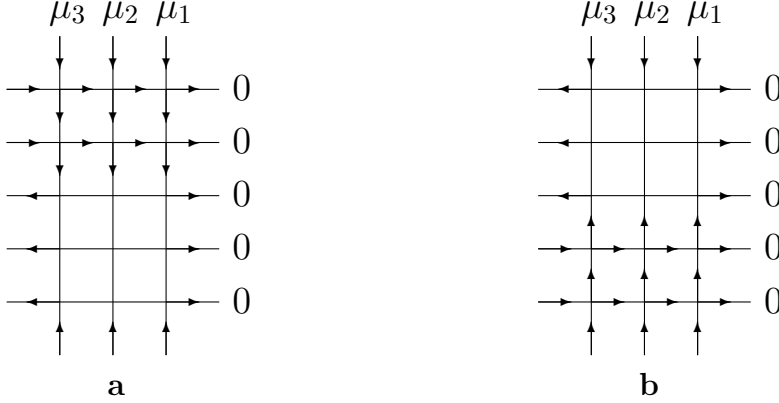


Figura 15

Dall'interpretazione grafica esemplificata dalla Figura 15 per il caso $M = 5$ possiamo dedurre che anche il secondo fattore è interpretabile come il prodotto di una funzione di partizione, stavolta per un reticolo $(m + 1) \times (m + 1)$, per una serie di coefficienti uguali alle potenze m -esime del parametro a calcolato in ciascuna delle radici di Bethe–Stroganov oltre l'equatore (Figura 15b). Sottolineiamo (Figura 15a o trattazione algebrica della sezione 6.6) che anche in questo caso potremmo equivalentemente sostituire i parametri b ai parametri a .

In conclusione le espressioni per i due fattori al denominatore sono le seguenti:

$$\langle \underbrace{\uparrow \dots \uparrow}_{m+1} \underbrace{\downarrow \dots \downarrow}_m | \Psi_b \rangle = Z_{m+1}(\{\mu_k\}) \prod_{k=1}^{m+1} (a(\mu_k))^m, \quad (6.25)$$

$$\langle \underbrace{\uparrow \dots \uparrow}_{m+1} \underbrace{\downarrow \dots \downarrow}_m | \Psi_a \rangle = Z_m(\{\lambda_j\}) \prod_{j=1}^m (a(\lambda_j))^{m+1}. \quad (6.26)$$

D'altra parte, consideriamo il quadrato dell'espressione per la norma dello stato di Razumov–Stroganov formulata nel Capitolo 3. Osservando le formule (2.2) e (2.5) notiamo che la norma quadra può essere espressa in maniera più compatta in

funzione della 3-enumerazione delle ASM:

$$\mathcal{N}^2(m) = \frac{A(2m+1; 3)}{3^{m^2}} \quad (6.27)$$

Questa relazione più diretta non risulta sorprendente, in quanto sono note tanto una relazione fra la 3-enumerazione e il modello a sei vertici per $\Delta = -1/2$ (si ricordi l'equazione (5.4)) quanto una relazione fra catena XXZ e modello a sei vertici con analoghi valori di Δ (si veda la sezione 5.4).

Possiamo riassumere tutte le precedenti considerazioni con la seguente formula equivalente alla terza congettura di Razumov–Stroganov:

$$\frac{Z_{2m+1}(\{\mu_k\}, \{\lambda_j\})}{Z_{2m+1}^{hom}(\frac{\pi}{2})Z_{m+1}(\{\mu_k\})Z_m(\{\lambda_j\})} = \frac{2^{(2m+1)^2}}{3^{m(m+1)}\sqrt{3}} \prod_{k=1}^{m+1} (a(\mu_k))^m \prod_{j=1}^m (a(\lambda_j))^{m+1}. \quad (6.28)$$

In tutte le funzioni di partizione presenti nell'equazione (6.28) si è sottointeso $\eta = \pi/3$

6.8 Terza congettura e funzioni \mathfrak{h}

Per ulteriori considerazioni sulla promettente relazione (6.28), ci sarà utile definire la seguente famiglia di N funzioni parametrizzate da $s = 1, 2, \dots, N$:

$$\mathfrak{h}_N(s; y_1, \dots, y_s) := \frac{\det_{j,k=1,\dots,s} [h_{N-s+k}(y_j) y_j^{s-k} (y_j - 1)^{k-1}]}{\Delta_s(y_1, \dots, y_s)}. \quad (6.29)$$

Il simbolo Δ_s indica il determinante di Vandermonde:

$$\Delta_s(y_1, \dots, y_s) = \prod_{1 \leq j < k \leq s} (y_k - y_j).$$

Per calcolare esplicitamente le funzioni $\mathfrak{h}_N(s)$ appena definite occorre conoscere i correlatori (6.3). Questi sono esprimibili a loro volta in termini di determinanti per

i quali non sono note in generale espressioni più esplicite. Tuttavia ci sono alcune notevoli eccezioni, in corrispondenza dei valori di (λ, η) nei quali, grazie alle relazioni (2.2)-(2.11), è esplicitamente noto il membro di destra dell'equazione (6.4). La nostra idea, che esporremo in questa sezione, è di esprimere la terza congettura proprio in termini delle funzioni h calcolate al *Dual Ice Point* e per $s = N$, ovvero $h_N(N; \lambda = \frac{\pi}{2}, \eta = \frac{\pi}{3})$.

In particolare, vogliamo esprimere seguendo [55] il rapporto fra la funzione di partizione di un modello a sei vertici $N \times N$ disomogeneo nei suoi parametri spettrali di colonna e la funzione di partizione dello stesso modello in cui si è eseguito il limite omogeneo $\lambda_j \rightarrow \lambda \forall j$. Utilizzeremo i parametri u_j introdotti con la (6.6).

Consideriamo il caso di una sola disomogeneità λ_1 nella prima colonna, mantenendo tutti gli altri parametri spettrali uguali a λ . Notiamo che a causa della simmetria fra righe e colonne del modello valgono per i vertici della prima colonna considerazioni analoghe a quelle fatte nella precedente sezione per i vertici della prima riga. Vi sarà cioè un singolo vertice di tipo 6, con probabilità $H_N(r)$ che sia proprio l' r -esimo.

Questo unico vertice ha peso di Boltzmann $c(\lambda_1) = c$; ci sono inoltre $r - 1$ vertici di tipo 3 (peso $b(\lambda_1)$) ed $N - r$ vertici di tipo 1 (peso $a(\lambda_1)$).

Nel caso omogeneo i pesi dei vertici della prima colonna sono invece uguali agli altri e pari a $a(\lambda), b(\lambda), c(\lambda)$. Da queste considerazioni possiamo scrivere in sintesi che

$$\begin{aligned}
 \frac{Z(\lambda_1, \lambda, \dots, \lambda)}{Z(\lambda, \lambda, \dots, \lambda)} &= \sum_{r=1}^N \left(\frac{b(\lambda_1)}{b(\lambda)} \right)^{r-1} \left(\frac{a(\lambda_1)}{a(\lambda)} \right)^{N-r} H_N(r) = \\
 &= \left(\frac{a(\lambda_1)}{a(\lambda)} \right)^{N-1} h_N \left(\frac{b(\lambda_1)a(\lambda)}{a(\lambda_1)b(\lambda)} \right).
 \end{aligned}$$

Tramite le variabili u , questa relazione diventa

$$\frac{Z(u_1, 1, \dots, 1)}{Z(1, 1, \dots, 1)} = \left(\frac{a(\lambda_1)}{a(\lambda)} \right)^{N-1} h_N(u_1).$$

Quando i parametri spettrali sono tutti disomogenei la precedente relazione può essere generalizzata a (si veda [55]):

$$\frac{Z(u_1, \dots, u_N)}{Z(1, \dots, 1)} = \prod_{\alpha=1}^N \left(\frac{a(\lambda_\alpha)}{a(\lambda)} \right)^{N-1} h_N(N; u_1, \dots, u_N). \quad (6.30)$$

Se anche un certo numero k di λ_α sono uguali a λ (a meno di riordinare gli indici possiamo supporre che lo siano quelli corrispondenti a $\alpha \geq N - k + 1$), la precedente formula continua a valere e in questo caso si verifica tramite il calcolo di un limite che si può sostituire $h_N(N - k; u_1, \dots, u_{N-k})$ ad $h_N(N; u_1, \dots, u_N)$.

Dalla (6.27) e dalla (6.28) specializzata al caso $\lambda = \frac{\pi}{2}, \eta = \frac{\pi}{3}$ si ottiene una seconda nuova formulazione della terza congettura di Razumov–Stroganov:

$$\frac{h_{2m+1}(2m+1; u_1, \dots, u_{m+1})}{h_m(m; u_1, \dots, u_m) h_{m+1}(m+1; u_{m+1}, \dots, u_{2m+1})} = \frac{Z_m^{hom} Z_{m+1}^{hom}}{c^{m^2} c^{(m+1)^2}} \quad (6.31)$$

dove abbiamo adottato la notazione nella quale $u_j = u(\lambda_j)$ per $j = 1, \dots, m$ e $u_j = u(\mu_{j-m})$ per $j = m+1, \dots, 2m+1$.

Inoltre $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e tanto le funzioni di partizione quanto le funzioni h sono tutte calcolate in $(\lambda, \eta) = (\pi/2, \pi/3)$.

Notiamo che sotto l'ipotesi della prima congettura, cioè se le radici di Bethe–Stroganov $\{\lambda_j\}$ e le radici di Bethe–Stroganov *oltre l'equatore* $\{\mu_j\}$ generano lo stato fondamentale, allora ricordando quando detto nella sezione 6.2 una delle u_j è uguale a 1 e tutte le altre compaiono a coppie della forma $(u, \frac{1}{u})$. Nell'Appendice C mostreremo che questa proprietà è vera senza bisogno di supporre che lo stato di Razumov–Stroganov sia quello fondamentale.

Il membro di destra dell'equazione (6.31) può essere espresso ancor più elegan-

temente in termini di 3-enumerazioni di ASM, sfruttando la (5.4):

$$\frac{Z_m^{hom}}{c^{m^2}} \frac{Z_{m+1}^{hom}}{c^{(m+1)^2}} = \frac{A(m; 3)A(m+1; 3)}{3^{m^2}}. \quad (6.32)$$

Si rimanda all'Appendice D per un calcolo esplicito delle funzioni \mathfrak{h} e ulteriori considerazioni sulla (6.31).

Concludiamo questa sezione con una espressione alternativa dell'equazione (6.30) che risulterà più conveniente per i futuri calcoli.

Introduciamo un nuovo insieme di variabili $\{w_j\}$, così definite:

$$w_j := \frac{1}{t} \frac{\sin(\lambda_j - \lambda)}{\sin(\lambda_j - \lambda - 2\eta)}. \quad (6.33)$$

La relazione fra le variabili $\{w_j\}$ e le variabili $\{u_j\}$ (si veda l'equazione (6.6)) è $u_j = \frac{1-w_j}{t^2 w_j - 2\Delta t w_j + 1}$. Nel caso in cui $\lambda_j = \lambda$ allora $w_j = 0$ e $u_j = 1$.

In termini delle (6.33) la relazione (6.30) diventa:

$$Z_N(\{\lambda_j\}) = Z_N^{hom}(\lambda) \mathfrak{h}_N(N; \{u_j\}) \prod_{j=1}^N \left(\frac{1 - 2\Delta t w_j + t^2 w_j}{\sqrt{1 - 2\Delta t w_j + t^2 w_j^2}} \right)^{N-1}. \quad (6.34)$$

6.9 Simmetrie della funzione di partizione nel limite omogeneo

In questa sezione ci proponiamo una analisi delle proprietà di Z^{hom} vista come funzione dei due pesi di Boltzmann a e b .

Consideriamo la trasformazione di uno stato del modello equivalente alla riflessione della sua rappresentazione grafica rispetto ad un asse verticale. È facile verificare che in questa trasformazione i vertici di tipo a diventano di tipo b e viceversa (mentre i vertici di tipo c rimangono tali), e che la trasformazione è un

endomorfismo nell'insieme dei possibili stati.

Se ne può dedurre che $Z(a, b) = Z(b, a)$.

Inoltre, se si hanno DWBC allora in ciascuno stato del modello sia il numero di vertici con peso a che quello dei vertici con peso b è necessariamente pari¹⁰. Questo implica che $Z(a, b) = Z(-a, -b) = Z(-a, b) = Z(a, -b)$, e i modelli apparentemente non fisici in cui a o b (o entrambi) sono negativi sono in realtà equivalenti a quelli ottenuti trasformando $a \rightarrow |a|$, $b \rightarrow |b|$.

Possiamo concludere che esistono tre isometrie $(a, b) \rightarrow (b, a)$, $(a, b) \rightarrow (-a, -b)$ e $(a, b) \rightarrow (a, -b)$ – che mandano Z in se stessa. Lo stesso naturalmente vale per tutte le loro possibili composizioni.

Nello spazio dei parametri (λ, η) le isometrie corrispondenti sono, rispettivamente: $(\lambda, \eta) \rightarrow (\pi - \lambda, \eta)$, $(\lambda, \eta) \rightarrow (\pi + \lambda, \eta)$ e $(\lambda, \eta) \rightarrow (\frac{\pi}{2} - \lambda, \frac{\pi}{2} - \eta)$.

Nel seguito saremo in particolare interessati all'ultima trasformazione, e precisamente al caso $\lambda = 0$ nel quale vale $Z^{hom}(\lambda = 0, \eta) = Z^{hom}(\lambda = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \eta)$.

6.10 Terza congettura e dualità $(a, b) \leftrightarrow (a, -b)$

Le considerazioni svolte nella sezione 6.8 e sintetizzate dalle formule (6.30)-(6.34) permettono di esprimere la funzione di partizione di un modello a sei vertici disomogeneo rispetto a quella di un modello omogeneo per λ arbitrario (η è invece fissato).

In particolare, si può scegliere $\lambda = \pi/2$ come nella sezione 6.8. In questo caso la produttoria nell'equazione (6.34) si semplifica considerevolmente perché t non viene a dipendere da η ma risulta costante e pari a 1.

Una possibile scelta alternativa è $\lambda = 0$; anche in questo caso si ha una situazione simile, con $t = -1$. Inoltre risulta $u_j(\lambda = 0) = -u_j(\lambda = \pi/2)$.

¹⁰Si veda l'Appendice E per la dimostrazione

La funzione di partizione per $\{\lambda_j\}$ generici può essere sviluppata tramite la (6.34) indifferentemente intorno a $\lambda = \pi/2$ o a $\lambda = 0$.

Naturalmente le due espressioni risultanti devono essere uguali.

Imponendo questa condizione si ottiene la formula:

$$\frac{Z_N(\frac{\pi}{2}, \eta) \mathfrak{h}_N(N; \frac{\pi}{2}, \eta; \{u_j\})}{Z_N(0, \eta) \mathfrak{h}_N(N; 0, \eta; \{-u_j\})} = \prod_{j=1}^N \left(\frac{1 + 2\Delta \hat{w}_j + \hat{w}_j \sqrt{1 - 2\Delta \tilde{w}_j + \tilde{w}_j^2}}{1 - 2\Delta \tilde{w}_j + \tilde{w}_j \sqrt{1 + 2\Delta \hat{w}_j + \hat{w}_j^2}} \right)^{N-1}. \quad (6.35)$$

Nell'equazione (6.35) abbiamo introdotto per comodità di notazione i simboli

$$\tilde{w}_j := w_j(\lambda = \pi/2) = \frac{\cos(\lambda_j)}{\cos(\lambda_j - 2\eta)} = \frac{1}{\Delta + c \tan(\lambda_j)}$$

e

$$\hat{w}_j := w_j(\lambda = 0) = -\frac{\sin(\lambda_j)}{\sin(\lambda_j - 2\eta)} = \frac{\tan(\lambda_j)}{c - \Delta \tan(\lambda_j)}.$$

La produttoria che costituisce il membro di destra nella equazione (6.35) può essere semplificata con qualche manipolazione algebrica; si ottiene che il j -esimo termine è indipendente da j ed uguale a

$$\left(\pm \frac{\Delta + 1}{c} \right)^{N-1}.$$

L'ambiguità nel segno non è importante, perché la costante ± 1 può essere portata fuori dalla produttoria, risultando pertanto elevata alla $N(N-1)$ -esima potenza: ma $N(N-1)$ è necessariamente pari e dunque possiamo scegliere il segno $+$ senza perdere in generalità.

Sfruttando la dualità $(\lambda, \eta) \rightarrow (\frac{\pi}{2} - \lambda, \frac{\pi}{2} - \eta)$ descritta nella sezione 6.9, si ottiene:

$$\frac{Z_N(\frac{\pi}{2}, \eta) \mathfrak{h}_N(N; \frac{\pi}{2}, \eta; \{u_j\})}{Z_N(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \eta) \mathfrak{h}_N(N; \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \eta; \{-u_j\})} = \left(\frac{\Delta + 1}{c} \right)^{N(N-1)}. \quad (6.36)$$

Questa equazione ha come corollario una relazione fra la x -enumerazione e la $(4 -$

x)-enumerazione delle ASM. Infatti, se $x = 4 \sin^2(\eta)$ sfruttando la (5.1) si ottiene:

$$\frac{A(N; x)}{A(N; 4-x)} = \frac{h_N(N; \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \eta; \{-u_j\})}{h_N(N; \frac{\pi}{2}, \eta; \{u_j\})} \left(\frac{\Delta(\eta) + 1}{c(\eta)} \right)^{N(N-1)} (\tan(\eta))^{N^2} \left(\sqrt{\frac{4-x}{x}} \right)^N. \quad (6.37)$$

Se ora fissiamo $\eta = \frac{\pi}{3}$ (il che implica $x = 3$), la precedente formula diventa:

$$\frac{A(N; 3)}{A_N} = \frac{j_N(-\vec{u})}{\kappa_N(\vec{u})}, \quad (6.38)$$

dove abbiamo introdotto la notazione

$$\begin{aligned} j_N(x_1, \dots, x_N) &:= h_N(N; \lambda = \frac{\pi}{2}, \eta = \frac{\pi}{6}; x_1, \dots, x_N), \\ \kappa_N(x_1, \dots, x_N) &:= h_N(N; \lambda = \frac{\pi}{2}, \eta = \frac{\pi}{3}; x_1, \dots, x_N), \\ \vec{u} &:= \{u_j\}. \end{aligned}$$

Sostituendo la relazione (6.38) nelle (6.31)-(6.32), si ottengono tre ulteriori formulazioni equivalenti della terza congettura di Razumov–Stroganov. Utilizziamo questa volta la notazione $v_j = u_j$ per $j = m+1, \dots, 2m+1$.

La prima formulazione è:

$$\frac{\kappa_{2m+1}(\vec{u}, \vec{v})}{j_m(-\vec{u})j_{m+1}(-\vec{v})} = \frac{A_m A_{m+1}}{3^{m^2}}. \quad (6.39)$$

Si può esprimere questa relazione anche utilizzando le sole funzioni h all'*Ice Point*, ottenendo:

$$\frac{j_{2m+1}(-\vec{u}, -\vec{v})}{j_m(-\vec{u})j_{m+1}(-\vec{v})} = \frac{A_m A_{m+1}}{3^{m^2}} \frac{A(2m+1; 3)}{A_{2m+1}}. \quad (6.40)$$

Infine la terza possibilità è:

$$\frac{j_{2m+1}(-\vec{u}, -\vec{v})}{\kappa_m(\vec{u})\kappa_{m+1}(\vec{v})} = \frac{A(m; 3)A(m+1; 3)A(2m+1; 3)}{3^{m^2}A_{2m+1}}. \quad (6.41)$$

6.11 Considerazioni conclusive

Il nostro lavoro di ricerca sulle prime tre congetture di Razumov–Stroganov non ha portato ad una definitiva dimostrazione: nondimeno, abbiamo ottenuto alcuni risultati intermedi promettenti ed altri degni di nota di per sé.

La sezione 6.4 costituisce una dimostrazione originale, alternativa a quelle già note, di parte della prima congettura (autovalore dell'energia). Nell'Appendice C abbiamo inoltre riportato una dimostrazione originale di alcune notevoli proprietà dei polinomi di Baxter–Stroganov.

Nella sezione 6.6 è stato compiuto, con la riformulazione (6.16), un primo passo verso una possibile dimostrazione della seconda congettura; le difficoltà tecniche incontrate non sono banali, ma contiamo di proseguire nell'immediato futuro il nostro studio e confidiamo in particolare di poter progredire ulteriormente nel problema del calcolo della (6.17).

Sulla terza congettura il progresso compiuto è stato maggiore. Molte delle varie formulazioni equivalenti espresse appaiono promettenti; in particolare nell'Appendice D abbiamo riportato ulteriori considerazioni sull'equazione (6.31). I risultati intermedi (6.36) e (6.37) sono inediti e interessanti di per sé nell'ambito dello studio del modello a sei vertici.

Appendice A

Notazione usata per i prodotti tensoriali

Date due matrici $n \times n$ A_{ij} e B_{kl} il loro prodotto tensoriale è definito come

$$(A \otimes B)_{kl}^{ij} = A_{ij} B_{kl}.$$

$A \otimes B$ può essere rappresentata come una matrice $n^2 \times n^2$ i cui elementi sono identificati dalla coppia di indici (i, j) che identifica i blocchi $n \times n$ e dalla coppia (k, l) che identifica la posizione interna ad un blocco.

Ad esempio nel caso $n = 2$ la rappresentazione esplicita di C_{kl}^{ij} è

$$C = \begin{pmatrix} C_{11}^{11} & C_{12}^{11} & C_{11}^{12} & C_{12}^{12} \\ C_{21}^{11} & C_{22}^{11} & C_{21}^{12} & C_{22}^{12} \\ C_{11}^{21} & C_{12}^{21} & C_{11}^{22} & C_{12}^{22} \\ C_{21}^{21} & C_{22}^{21} & C_{12}^{22} & C_{22}^{22} \end{pmatrix}$$

Date due matrici $n^2 \times n^2$, il loro prodotto è definito come l'usuale prodotto righe per colonne: $A_{cd}^{ab} B_{dg}^{bf} = (AB)_{cg}^{af}$ (sommando sugli indici ripetuti).

Vale la relazione $(A \otimes B) = (A \otimes 1)(1 \otimes B)$, dove 1 è l'unità in $GL(n, C)$.

Per la traccia di $(A \otimes B)$ vale la formula:

$$\text{tr}_{n^2}(A \otimes B) = \sum_{i,j} (A \otimes B)_{jj}^{ii} = \sum_{i,j} A_{ii} B_{jj} = \sum_i (A_{ii} \sum_j B_{jj}) = \text{tr}_n(A) \cdot \text{tr}_n(B)$$

La formula (1.16) segue immediatamente da questa relazione, dalla (1.15) e dalla proprietà ciclica della traccia.

Due matrici particolari sono la matrice unitaria $E = 1 \otimes 1$ e la matrice di permutazione $\Pi_{kl}^{ij} = \delta_{il} \delta_{jk}$.

Una rappresentazione esplicita per Π nel caso $n = 2$ è:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sigma^z}{2} & \sigma^- \\ \sigma^+ & \frac{1-\sigma^z}{2} \end{pmatrix}$$

Dalla definizione di Π e da quella del prodotto fra matrici segue banalmente che $\Pi(A \otimes B)\Pi = (B \otimes A)$ e che $\Pi^2 = E$.

Appendice B

Relazione fra gli operatori B e C

Consideriamo l'operatore di Lax

$$L(n|\lambda, \eta) = \begin{pmatrix} A_n(\lambda, \eta) & B_n(\lambda, \eta) \\ C_n(\lambda, \eta) & D_n(\lambda, \eta) \end{pmatrix},$$

dove A_n, B_n, C_n, D_n sono matrici definite come nell'equazione (1.6).

Notiamo che fissato $\eta \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti proprietà:

$$A_n(-\lambda^*) = -D_n^\dagger(\lambda); \quad B_n(-\lambda^*) = C_n^\dagger(\lambda);$$

$$C_n(-\lambda^*) = B_n^\dagger(\lambda); \quad D_n(-\lambda^*) = -A_n^\dagger(\lambda).$$

Da queste e dalla definizione degli operatori B e C segue che

$$C^\dagger(\lambda) = (-1)^{M+1} B(-\lambda^*). \tag{B.1}$$

Consideriamo ora l'oggetto di interesse nella sezione 6.7, ovvero $(C(\lambda)|x)^\dagger = \langle x|C^\dagger(\mu) = \langle x|B(-\lambda^*)$, con λ radice di Bethe–Stroganov e $|x\rangle$ un qualsiasi stato; l'ultima eguaglianza non è generale, ma è valida nel caso in esame in cui M è dispari.

Benché nella sezione 6.7 sia di interesse specifico il caso $\eta = \frac{\pi}{3}$, i risultati che

seguono valgono per ogni $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$ (cioè $|\Delta| < 1$).

Supponendo che l'insieme delle radici di Bethe–Stroganov non contenga stringhe¹, una radice di Bethe–Stroganov μ è caratterizzata da un impulso (1.26) reale, restrizione del resto in accordo con l'intuizione fisica.

Matematicamente, questo equivale a richiedere $|\frac{\sin(\mu-\eta)}{\sin(\mu+\eta)}| = 1$; ovvero, risolvendo l'equazione per $\eta \neq k\pi$,

$$\operatorname{Re}(\mu) = k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Inoltre possiamo notare che tutte le matrici A_n, B_n, C_n, D_n sono periodiche in λ lungo l'asse reale con periodo π ; di conseguenza anche la matrice B lo è: in formule, $B(\lambda + k\pi) = B(\lambda)$.

D'altro canto, per quanto dedotto in precedenza se μ è una radice di Bethe–Stroganov allora $-\mu^* = \mu - k\pi$; ne consegue che per il caso di nostro interesse

$$C^\dagger(\mu) = B(-\mu^*) = B(\mu),$$

q.e.d.

¹Si veda l'Appendice C per i dettagli; anticipiamo che questa condizione è garantita sotto l'ipotesi che lo stato di Razumov–Stroganov sia quello fondamentale. Precisiamo inoltre che ci siamo posti sotto questa ipotesi unicamente per snellire la dimostrazione: l'equazione (6.24) vale anche nel caso in cui vi siano radici di stringa, perché gli operatori B commutano.

Appendice C

Risultati generali sulle equazioni di Bethe e sui polinomi di Baxter–Stroganov

C.1 Le equazioni di Bethe

In questa sezione ci proponiamo di analizzare più in dettaglio le proprietà delle equazioni di Bethe nel settore $|\Delta| < 1$, ovvero $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$, con particolare attenzione al caso di nostro interesse $\Delta = -\frac{1}{2}$.

Consideriamo dunque le equazioni (1.25). Notiamo che se sostituiamo una delle radici di Bethe λ_k con $\lambda_k + \pi$ otteniamo un nuovo insieme di soluzioni. Possiamo quindi identificare i punti λ e $\lambda + \pi$ nel piano complesso; in particolare possiamo assumere senza perdere in generalità che $-\frac{\pi}{2} < \text{Re}(\lambda_j) \leq \frac{\pi}{2} \forall j$.

Inoltre se si cambia il segno alla parte reale di tutte le radici di Bethe si ottiene nuovamente una soluzione, ovvero le equazioni (1.25) rimangono invariate sotto la trasformazione $\{\lambda_j\} \rightarrow \{-\lambda_j^*\}$.

Perché l'impulso totale sia reale ci sono due possibilità: gli impulsi della singola particella possono essere reali, oppure vi possono essere impulsi complessi

(corrispondenti a stati legati) purché le parti immaginarie si cancellino sommando.

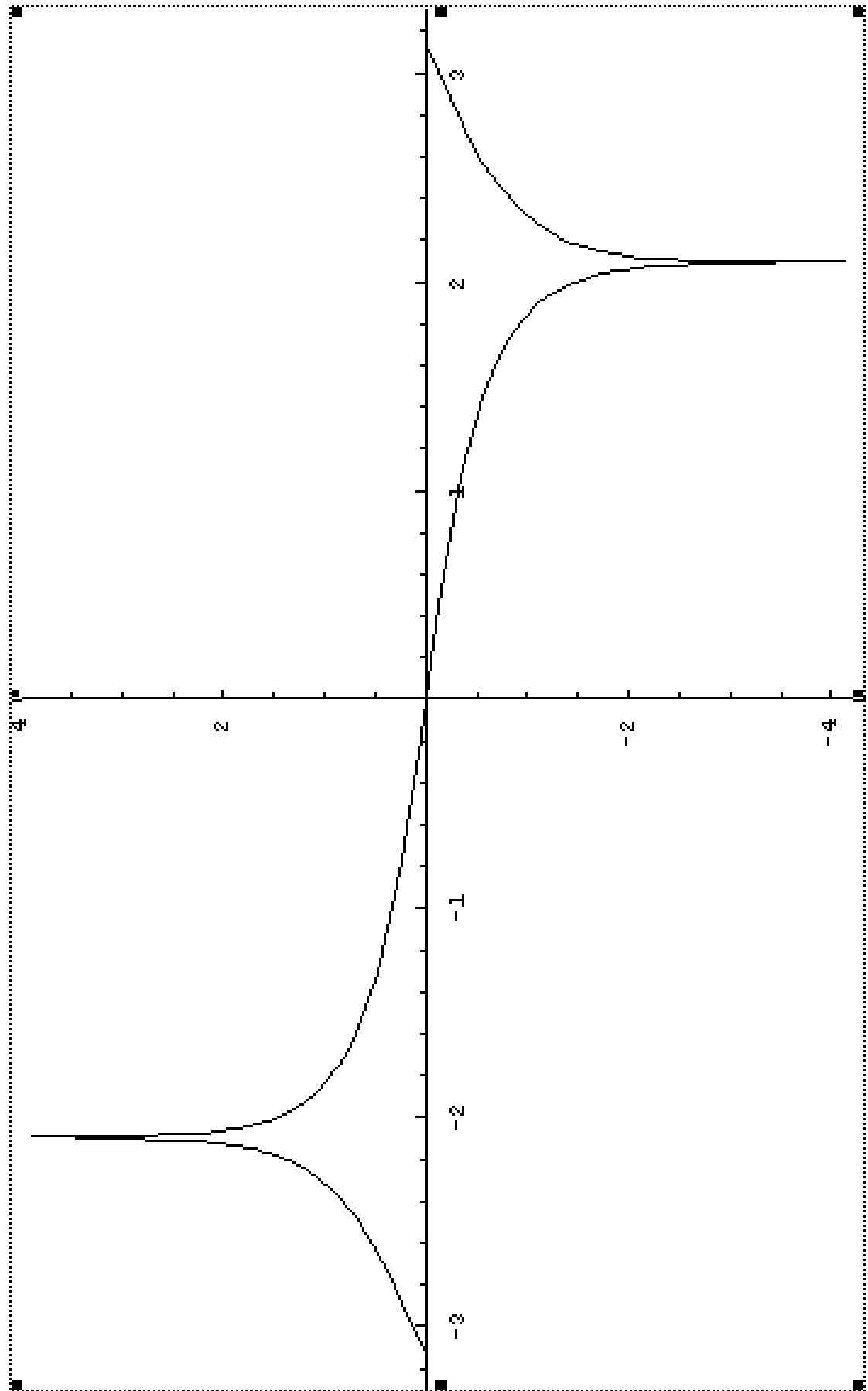
Come abbiamo notato nell'Appendice B il primo caso corrisponde a $\text{Re}(\lambda_j) = k\frac{\pi}{2}$, con $k \in \{0, 1\}$. In particolare per lo stato fondamentale si ha che $\text{Re}(\lambda_j) = \frac{\pi}{2} \forall j$ (si veda [51]). Invertendo la (1.26) si ottiene l'espressione della radice λ in funzione dell'impulso associato:

$$\lambda(p) = \arctan \left(\tan(\eta) \frac{e^{ip} + 1}{e^{ip} - 1} \right).$$

Abbiamo riportato nel grafico di pagina 88 (ottenuto per $\eta = \frac{\pi}{3}$) l'andamento di $\text{Im}(\lambda(p))$ per impulsi reali ($-\pi < p < \pi$); gli asintoti verticali sono $p = \pm 2\eta$. Sempre in questo settore, $\text{Re}(\lambda(p))$ è invece $\frac{\pi}{2}$ per $|p| < 2\eta$ e 0 altrove.

La seconda possibilità corrisponde invece alle cosiddette *stringhe complete*. Queste non sono sempre possibili, ma compaiono quando $\frac{\eta}{\pi}$ è razionale, ovvero se esistono due interi primi fra loro c_1, c_2 tali che $\eta = \frac{c_1\pi}{c_2}$ (si veda [54]). Le stringhe complete sono sottoinsiemi delle soluzioni di Bethe composti da c_2 radici caratterizzate dall'aver parti immaginarie identiche e parti reali a distanza di 2η l'una dall'altra. Data una stringa completa se ne possono ottenere infinite altre che soddisfano alla medesima equazione di Bethe sommando una costante reale alle radici della stringa: senza perdere in generalità pertanto si può fissare a 0 la media delle parti reali. Le radici di stringa compaiono dunque a coppie $(\lambda, -\lambda^*)$ e poiché $p(-\lambda^*) = p^*(\lambda)$ la somma delle parti immaginarie degli impulsi si annulla come previsto.

Nel caso $\eta = \frac{\pi}{3}$ in particolare $c_2 = 3$. Si può imporre per quanto detto in precedenza che una delle tre radici di stringa abbia parte reale nulla (e quindi impulso reale) per cui si hanno *3-stringhe* formate da coppie di radici della forma $\pm\frac{\pi}{3} + i\Lambda$, $\Lambda \in \mathbb{R}$, più una radice singola uguale a $i\Lambda$ (oltre naturalmente alle altre soluzioni di Bethe nel caso in cui $m > 3$). L'impulso complessivo proveniente dalla 3-stringa è nullo.



C.2 I polinomi di Baxter–Stroganov

I polinomi di Baxter–Stroganov sono definiti come le soluzioni dell’equazione (6.2). Per definizione, $\tilde{q}_m(\lambda) = \text{cost.} \times \prod_{j=1}^m \sin(\lambda - \lambda_j)$, con $\{\lambda_j\}$ radici di Bethe–Stroganov. Questa struttura implica (quasi)periodicità con periodo π : $\tilde{q}_m(\lambda + \pi) = (-1)^m \tilde{q}_m(\lambda)$. Relazioni analoghe valgono per i polinomi di Baxter–Stroganov *oltre l’equatore* $\tilde{p}_{m+1}(\lambda)$.

Inoltre mandando λ in $-\lambda$ nell’equazione (6.2) si vede che $\tilde{q}_m(\lambda)$ e $\tilde{p}_{m+1}(\lambda)$ devono essere a parità definita. In effetti si può dimostrare in particolare che i polinomi di Baxter–Stroganov sono pari. Diamo nel seguito la dimostrazione per $\tilde{q}_m(\lambda)$ (l’estensione al caso *oltre l’equatore* è banale).

Supponiamo per assurdo che \tilde{q}_m sia dispari. Abbiamo mostrato nella sezione precedente che per tutte le radici di Bethe–Stroganov vale $\text{Re}(\lambda_j) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$: se il polinomio di Baxter–Stroganov fosse dispari una radice sarebbe necessariamente 0 e tutte le altre comparirebbero o a coppie della forma $(\lambda, -\lambda)$ o a coppie della forma $\frac{\pi}{2} \pm i\Lambda$ con Λ reale (più eventualmente la radice singola $\frac{\pi}{2}$). Dalla definizione (1.26) si ottengono le seguenti proprietà:

$$p(-\lambda) = -p(\lambda), \quad p(\lambda^*) = -p^*(\lambda), \quad p(0) = \pi, \quad p\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Ne possiamo concludere che se il polinomio di Baxter–Stroganov fosse dispari allora il momento totale dello stato di Razumov–Stroganov dovrebbe essere π . Questa è una contraddizione dato che abbiamo già dimostrato (nella sezione 6.2) che deve essere nullo: dunque il polinomio di Baxter–Stroganov è pari.

Dalla precedente dimostrazione seguono tre importanti corollari:

- Le radici di Bethe–Stroganov non possono contenere un numero dispari di stringhe complete (non è escluso che queste appaiano in numero pari).
- 0 non è una radice di Bethe–Stroganov; $\frac{\pi}{2}$ lo è se e solo se m è dispari; tutte

le altre radici compaiono o a coppie del tipo $\pm i\Lambda$ o a coppie del tipo $\frac{\pi}{2} \pm i\Lambda$ o (se sono radici di stringa) a quartetti della forma $(\frac{\pi}{3} \pm i\Lambda, -\frac{\pi}{3} \pm i\Lambda)$.

- I momenti di singola particella associati alle radici di Bethe–Stroganov compaiono a coppie $(p, -p)$, più eventualmente (se e solo se m è dispari) un momento nullo.

In particolare abbiamo usato il terzo risultato nelle sezioni 6.2 e 6.4; inoltre la particolare struttura dei momenti di singola particella ci sarà utile per le considerazioni ed i calcoli che svolgeremo nell'Appendice D. Più in generale questi tre corollari rappresentano un ulteriore indizio a favore della prima congettura, perché sono coerenti con l'ipotesi che lo stato di Razumov–Stroganov sia quello fondamentale. Infatti nello stato fondamentale le radici di Bethe compaiono a coppie della forma $\lambda_{\pm} = \frac{\pi}{2} \pm i\Lambda$ più un eventuale radice singola $\lambda_0 = \frac{\pi}{2}$: dunque non c'è nessuna stringa e la struttura dei momenti è la stessa di quella prevista dal terzo corollario per le radici di Bethe–Stroganov.

Risultati del tutto analoghi valgono per il polinomio di Baxter–Stroganov *oltre l'equatore*, \tilde{p}_{m+1} : l'unica differenza è che la radice singola stavolta compare se e solo se m è pari.

Chiudiamo questa sezione notando che, definendo $\sigma_m(\lambda) := \sin^{2m+1}(\lambda)\tilde{q}_m(\lambda)$, dalla (6.2) si ottiene l'equazione $\sigma_m(\lambda) + \sigma_m(\lambda + \frac{2\pi}{3}) + \sigma_m(\lambda + \frac{4\pi}{3}) = 0$.

Appendice D

Sulle funzioni h

D.1 Calcolo esplicito delle funzioni h

La rappresentazione esplicita delle funzioni $h_N(N; y_1, \dots, y_N)$ è di nostro interesse perché queste compaiono in molte nostre riformulazioni della terza congettura di Razumov–Stroganov (equazioni (6.31), (6.39), (6.40) e (6.41)). In particolare ci è stato utile calcolare le h per il controllo numerico delle equazioni summenzionate, che abbiamo effettuato per piccoli valori del numero di siti della catena. Le h sono definite dal caso particolare $s = N$ della (6.29) e vengono calcolate in termini delle funzioni generatrici (6.5), a loro volta definite in termini dei correlatori di bordo a un punto.

Formule chiuse per questi ultimi sono state trovate soltanto per particolari valori dei parametri spettrali e del parametro di *crossing*; lo stesso vale per le funzioni di nostro interesse. Fortunatamente, per i nostri scopi è sufficiente conoscerle all'*Ice Point* e al *Dual Ice Point*, dove i correlatori sono noti: si possono infatti calcolare utilizzando, rispettivamente, le formule per la enumerazione raffinata e la 3-enumerazione raffinata delle matrici a segno alterno.

Nella tabella seguente ad esempio abbiamo elencato le funzioni generatrici $h_N(y)$ in questi due punti per $N \leq 7$.

Come si può notare anche dalla tabella, poiché (sezione 6.3) $\lambda = \frac{\pi}{2}$ implica

$H_N(r) = H_N(N + 1 - r)$ nei due punti di nostro interesse vale la proprietà

$$h_N\left(\frac{1}{y}\right) = y^{1-N} h_N(y) \quad (\text{D.1})$$

N	$h_N(y; \lambda = \frac{\pi}{2}, \eta = \frac{\pi}{6})$	$h_N(y; \lambda = \frac{\pi}{2}, \eta = \frac{\pi}{3})$
1	1	1
2	$\frac{1+y}{2}$	$\frac{1+y}{2}$
3	$\frac{2+3y+2y^2}{7}$	$\frac{2+5y+2y^2}{9}$
4	$\frac{1+2y+2y^2+y^3}{6}$	$\frac{1+4y+4y^2+y^3}{10}$
5	$\frac{14+35y+45y^2+35y^3+14y^4}{143}$	$\frac{2+11y+19y^2+11y^3+2y^4}{45}$
6	$\frac{3+9y+14y^2+14y^3+9y^4+3y^5}{52}$	$\frac{5+35y+86y^2+86y^3+35y^4+5y^5}{252}$
7	$\frac{22+77y+140y^2+168y^3+140y^4+77y^5+22y^6}{646}$	$\frac{10+85y+272y^2+400y^3+272y^4+85y^5+10y^6}{1134}$

Il calcolo delle $h_N(N; y_1, \dots, y_N)$ è un po' laborioso, ma non presenta particolari difficoltà. Chiudiamo questa sezione riportando nella tabella seguente la rappresentazione esplicita per $N < 4$ di tali funzioni nei due punti considerati, ovvero, usando la notazione della sezione 6.10, le funzioni j_N (*Ice Point*) e κ_N (*Dual Ice Point*). Osserviamo che, coerentemente con la definizione, si tratta di polinomi simmetrici nelle proprie variabili $\{y_j\}$.

N	$j_N(y_1, \dots, y_N)$	$\kappa_N(y_1, \dots, y_N)$
1	1	1
2	$\frac{1+y_1 y_2}{2}$	$\frac{1+y_1 y_2}{2}$
3	$\frac{1+y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 + y_1 y_2 y_3 (y_1 + y_2 + y_3 - 1 + y_1 y_2 y_3)}{7}$	$\frac{1+y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 + y_1 y_2 y_3 (y_1 + y_2 + y_3 + 1 + y_1 y_2 y_3)}{9}$

Al crescere di N la forma esplicita si complica molto rapidamente, come si intuisce già dal caso $N = 3$ (le formule per $N = 4$ occuperebbero circa quattro righe di questa pagina, quelle per $N = 5$ la pagina intera. . .).

D.2 Sull'equazione (6.31)

I calcoli relativi alle funzioni $h_{2m+1}(2m+1; u_1, \dots, u_{2m+1})$ si semplificano considerevolmente tenendo conto delle proprietà delle radici di Bethe–Stroganov.

Infatti, poiché i polinomi di Baxter–Stroganov (sia sopra che oltre l'equatore) sono funzioni pari e (quasi)periodiche¹ lungo l'asse reale con periodo π , possiamo concludere (si veda l'Appendice C) che i momenti di singola particella associati alle $2m+1$ radici di Bethe–Stroganov (m sopra l'equatore ed $m+1$ oltre l'equatore) formano m coppie della forma $(p, -p)$ più un singolo momento nullo.

In termini delle variabili u_j (6.6), avremo pertanto m coppie della forma $(u, \frac{1}{u})$ più una variabile singola uguale a 1. Se non ci sono radici di stringa ($\text{Re}(\lambda) = 0$ o $\text{Re}(\lambda) = \frac{\pi}{2}$) è immediato verificare le precedenti affermazioni: le coppie $(u, \frac{1}{u})$ corrispondono a coppie (λ, λ^*) ; nel caso di radici di stringa ($\text{Re}(\lambda) = \pm \frac{\pi}{3}$) occorre invece considerare coppie $(\lambda, -\lambda)$.

Se inseriamo questo *Ansatz* nella definizione (6.29), otteniamo due fattori: un determinante di Vandermonde e un determinante di funzioni generatrici. Delle $2m+1$ variabili u_j , m corrispondono alle usuali radici di Bethe–Stroganov ed $m+1$ a quelle oltre l'equatore. Per esigenze di calcolo, supporremo nel seguito di avere rinominato gli indici (se necessario) in modo da potere ordinare le variabili nel seguente modo: $1, u_1, \frac{1}{u_1}, \dots, u_m, \frac{1}{u_m}$.

¹Più precisamente, $\tilde{q}_m(\lambda + \pi) = (-1)^m \tilde{q}_m(\lambda)$, $\tilde{p}_{m+1}(\lambda + \pi) = (-1)^{m+1} \tilde{p}(\lambda)_{m+1}$. Le considerazioni che seguono valgono in ogni caso.

Il Vandermonde risulta:

$$\Delta_{2m+1} = \prod_{j=1}^m \frac{(u_j - 1)^3(u_j + 1)}{u_j^{2m}} \prod_{1 \leq j < k \leq m} (u_k - u_j)^2 (u_k u_j - 1)^2. \quad (\text{D.2})$$

L'altro fattore è il determinante di una matrice $(2m + 1) \times (2m + 1)$, ma si riduce a un determinante $2m \times 2m$ sviluppandolo sulla prima colonna, che ha un unico 1 sulla prima riga e poi tutti 0.

Le colonne dispari sono della forma $h_{k+1}(u_j)(u_j - 1)^k u_j^{2m-k}$, $k = 1, \dots, 2m$; sfruttando la proprietà (D.1) possiamo scrivere le colonne pari nella forma $(-1)^k h_{k+1}(u_j)(u_j - 1)^k u_j^{-2m-k}$.

Possiamo moltiplicare le colonne dispari per u_j^{-2m} e le colonne pari per u_j^{2m} lasciando inalterato il determinante della matrice. A questo punto sostituiamo alle colonne pari la somma fra i loro elementi e quelli della colonna dispari immediatamente precedente, e a meno di $m(m - 1)$ permutazioni di righe e colonne (notiamo che $m(m - 1)$ è necessariamente un numero pari, particolare che evita problemi di segno) possiamo scrivere il determinante nel seguente modo:

$$\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & 2B \end{bmatrix} = 2^m \det A \det B.$$

Nella formula precedente A e B sono matrici $m \times m$ siffatte:

$$A = \left[h_{2k}(u_j) \left(\frac{u_j - 1}{u_j} \right)^{2k-1} \right]_{j,k=1,\dots,m}, \quad B = \left[h_{2k+1}(u_j) \left(\frac{u_j - 1}{u_j} \right)^{2k} \right]_{j,k=1,\dots,m}.$$

Nel caso del *Dual Ice Point* possiamo sfruttare le relazioni

$$h_{2k+2}(y) = \frac{y+1}{2} \mathcal{B}_{2k}(y), \quad h_{2k+3}(y) = \frac{(y+2)(2y+1)}{9} \mathcal{B}_{2k}(y),$$

dove i \mathcal{B}_{2k} sono collegati alle due soluzioni indipendenti dell'equazione (6.2) con $M = 2k + 1$, ovvero il polinomio di Baxter–Stroganov \tilde{q}_k e il polinomio di Baxter–

Stroganov oltre l'equatore \tilde{p}_{k+1} (si veda [17] per i dettagli: l'unica proprietà che useremo qui è che il polinomio \mathcal{B}_{2k} si annulla quando calcolato nelle radici di Bethe per una catena con $2k + 1$ siti).

Queste equazioni ci consentono di concludere che

$$\begin{aligned} & \kappa_{2m+1}\left(1, u_1, \frac{1}{u_1}, \dots, u_m, \frac{1}{u_m}\right) \\ &= \frac{1}{3^{2m}} \prod_{j=1}^m \frac{u_j^{2m+1}(u_j+2)(2u_j+1)}{(u_j-1)^4} \prod_{1 \leq j < k \leq m} \frac{1}{(u_k-u_j)^2(u_k u_j-1)^2} (\det \mathcal{M}_{j,k=1,\dots,m})^2, \end{aligned} \tag{D.3}$$

dove si è definita la matrice

$$\mathcal{M}_{j,k} = \left[\mathcal{B}_{2(k-1)}(u_j) \left(\frac{u_j-1}{u_j} \right)^{2k} \right].$$

Sottolineiamo l'interessante struttura della matrice il cui determinante compare elevato al quadrato nell'equazione precedente. Infatti nella k -esima riga compaiono i polinomi $\mathcal{B}_{2(k-1)}$, collegati ai due polinomi di Baxter–Stroganov per una catena con $2k - 1$ siti, ma calcolati nelle radici di Bethe–Stroganov per una catena con $2m + 1$ siti. Poiché $k \leq m$, *a priori* nessun elemento della matrice si annulla.

Concludiamo questa appendice calcolando con le tecniche appena descritte il rapporto $\frac{\kappa_{2m+1}}{\kappa_{m+1}\kappa_m}$, che costituisce il membro di sinistra dell'equazione (6.31). Supponiamo che m sia pari e poniamo quindi $m = 2m'$. In questo caso, a meno di rinominare gli indici², possiamo etichettare gli argomenti del primo fattore del denominatore così: $(1, u_1, \frac{1}{u_1}, \dots, u_{m'}, \frac{1}{u_{m'}})$. Gli argomenti del secondo fattore sono invece: $(u_{m'+1}, \frac{1}{u_{m'+1}}, \dots, u_m, \frac{1}{u_m})$.

Quindi per κ_{m+1} vale una formula analoga a quella per κ_{2m+1} , purché si sostuisca

²Esplicitamente: per questi calcoli le radici di Bethe–Stroganov oltre l'equatore corrispondono a u_j per $j = 1, \dots, m'$; quando invece $j = m' + 1, \dots, m$ le u_j sono calcolate nelle usuali radici di Bethe–Stroganov.

m' ad m nella (D.3). Per quanto riguarda κ_m , oltre agli analoghi cambiamenti notiamo che non c'è l'argomento uguale a 1, e quindi nel Vandermonde manca un fattore $(-1)^{m'} \prod_{j=m'+1}^m \frac{(u_j-1)^2}{u_j}$.

In sintesi pertanto si ha:

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa_{2m+1}(1, u_1, \frac{1}{u_1}, \dots, u_m, \frac{1}{u_m})}{\kappa_{m+1}(1, u_1, \frac{1}{u_1}, \dots, u_{m'}, \frac{1}{u_{m'}})} \kappa_m(u_{m'+1}, \frac{1}{u_{m'+1}}, \dots, u_m, \frac{1}{u_m}) \\ &= (-1)^{m'} \prod_{j=1}^m u_j^m \prod_{k=m'+1}^m \left[\frac{u_k}{(u_k-1)^2} \prod_{j=1}^{m'} \frac{1}{(u_k-u_j)^2 (u_k u_j - 1)^2} \right] \\ & \quad \times \left(\frac{\det \mathcal{M}_{j,k=1,\dots,m}}{\det \mathcal{M}_{j,k=1,\dots,m'} \det \mathcal{M}_{j=m'+1,\dots,m; k=1,\dots,m'}} \right)^2, \quad m' = \frac{m}{2} \quad (\text{D.4}) \end{aligned}$$

Nel caso invece in cui m sia dispari la precedente formula si modifica leggermente di conseguenza.

Tenendo conto dell'*Ansatz* sulla struttura a coppie delle radici u_j , possiamo scrivere le equazioni di Bethe a cui queste devono obbedire nel seguente modo:

$$\begin{aligned} u_j^{2m+2} &= - \prod_{k=1}^{m'} \frac{1+u_k+u_k u_j}{1+u_j+u_k u_j} \frac{1+u_k+u_j}{u_k+u_j+u_k u_j}, \quad j = 1, \dots, m'; \\ u_j^{2m+2} &= \frac{2u_j+1}{2+u_j} \prod_{k=m'+1}^m \frac{1+u_k+u_k u_j}{1+u_j+u_k u_j} \frac{1+u_k+u_j}{u_k+u_j+u_k u_j}, \quad j = m'+1, \dots, m; \\ & \prod_{j=1}^{m'} \frac{1+2u_j}{2+u_j} = -1. \end{aligned}$$

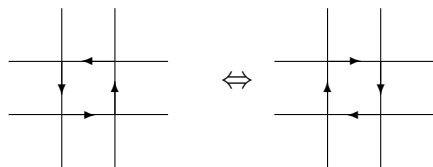
Sebbene non offrano spunti evidenti per la dimostrazione della terza congettura, le equazioni (D.3) e (D.4) mostrano una struttura meritevole di ulteriori indagini.

Appendice E

Sul numero di vertici di tipo a e di tipo b

Consideriamo il modello a sei vertici con DWBC.

Se le condizioni al contorno sono fisse, come è nel caso di nostro interesse, allora dato uno stato del modello tutti gli altri possibili stati sono ottenibili applicando un'opportuna successione di trasformazioni locali, ognuna agente solo su quattro vertici contigui. Queste trasformazioni locali sono del tipo:



Tutte le frecce non disegnate rimangono invariate.

Esistono $2^4 = 16$ tipi di trasformazioni locali di questo genere (una per ogni possibile configurazione degli 8 *links* esterni ai vertici interessati compatibile con la *ice rule*). Considerandole nel dettaglio, si vede che: 4 di queste non cambiano il numero totale di ciascun tipo di vertici; 2 cambiano due vertici di tipo a in b o viceversa; 2 tipi mandano quattro vertici c in due a e due b o viceversa; 4 tipi mandano due c in due a o viceversa; e infine 4 tipi mandano due b in due c o

viceversa.

Pertanto, con nessuna trasformazione si può passare da un numero pari ad un numero dispari di a , e lo stesso vale per b . Dunque è sufficiente dimostrare che esiste uno stato con numero di a pari e numero di b pari: ad esempio si può considerare lo stato della Figura 8 (Capitolo 5), in cui vi sono M vertici di tipo c , $M(M - 1)$ di tipo a e nessuno di tipo b .

Notiamo che un corollario di quanto appena dimostrato è che il numero di vertici c ha la stessa parità di M , coerentemente con quanto affermato nella sezione 5.3.

Appendice F

La misura di Giauque e Stout dell'entropia residua dell'acqua

Storicamente, l'interesse per l'entropia residua del ghiaccio che ha stimolato prima l'ipotesi di Pauling e poi la nascita del modello sei vertici deriva dalle misure effettuate da chimici sperimentali negli anni Trenta. Di particolare importanza fu il celebre esperimento effettuato nel 1936 a Berkeley da W. F. Giauque e J. W. Stout. In questa Appendice riassumeremo la tecnica da loro utilizzata, rimandando per i dettagli al loro articolo originale [28].

Nonostante risalga ad oltre settanta anni fa, la misura di Giauque e Stout è tuttora la migliore disponibile. Non è da escludere che nel prossimo futuro si cerchi di migliorarne la precisione al fine di confrontare le predizioni teoriche di modelli più recenti [56] con i dati sperimentali.

L'idea sottostante l'esperimento fu quella di sfruttare la relazione termodinamica $\frac{\partial S(p,T)}{\partial T} = \frac{dS(V,T)}{dT} = \frac{C_p}{T}$ che lega l'entropia al calore specifico. Misurando con precisione quest'ultimo al variare della temperatura in un intervallo $[\epsilon, T_0]$ (in particolare per temperature vicine quanto più possibile allo zero assoluto) e integrando numericamente in $d \ln T$, i due ottennero un valore sperimentale per $S(T_0) - S(\epsilon)$. Confrontando con il valore di $S(T_0)$ misurato indipendentemente con altri metodi si arrivò ad una stima dell'entropia residua dell'acqua.

L'apparato sperimentale consisteva in un calorimetro cilindrico a parete doppia in rame munito di termometro a resistenza. La massima attenzione fu posta affinché non vi fossero sollecitazioni indesiderate sul termometro; la taratura di quest'ultimo fu estremamente accurata.

Prima della misura l'acqua distillata, proveniente da un altro laboratorio chimico, fu ulteriormente purificata finché la frazione delle impurezze non risultò inferiore alle 3 parti per milione, e quindi ghiacciata.

Al fine di concedere un tempo ampiamente sufficiente per l'equilibrio nel solido, il ghiaccio fu raffreddato molto lentamente. La temperatura fu portata a 90 K in 156 ore. Nelle successive tre ore una prima serie di misure del calore specifico fu presa, mentre la temperatura del ghiaccio scendeva fino a 68 K . Per raggiungere temperature inferiori venne a questo punto utilizzato dell'idrogeno liquido: il ghiaccio fu portato a 13 K in 27 ore. Durante le 80 ore seguenti fu fatta una seconda serie di misure, da 15 K al punto di fusione. Fu poi misurato (con lo scopo di verificare ulteriormente l'assenza di effetti indesiderati) il calore latente molare di fusione: il risultato fu di $1436 \pm 1 \frac{\text{cal}}{\text{mol}}$ contro un valore atteso di $1435.7 \pm 0.9 \frac{\text{cal}}{\text{mol}}$. Successivamente ci fu una terza serie di misure del calore specifico dal punto di fusione a 298.1 K , e una misura del calore latente molare di vaporizzazione a tale temperatura. Infine l'acqua allo stato aeriforme così ottenuto fu compressa a temperatura costante fino a riportarla alla pressione atmosferica.

Per la stima di $S(298.1\text{ K}) - S(0\text{ K})$ furono sommati i seguenti contributi:

- Integrazione analitica in $d \ln T$ del calore specifico secondo il modello di Debye fra 0 e 10 K
- Integrazione numerica in $d \ln T$ del calore specifico sperimentale fra 10 K e 273.1 K , utilizzando dati da altre misure note al tempo fra 10 K e 15 K e i propri dati da 15 K in poi
- Rapporto fra calore latente di fusione e temperatura di fusione

- Integrazione numerica in $d \ln T$ del calore specifico sperimentale fra $273.1 K$ e $298.1 K$
- Rapporto fra calore latente di vaporizzazione e temperatura di vaporizzazione
- Variazione di entropia per la compressione isoterma del gas, basata su un modello precedentemente noto per il vapore d'acqua come gas perfetto con correzioni su basi empiriche

Il risultato per l'entropia molare fu di $44.28 \pm 0.05 \frac{\text{cal}}{K \cdot \text{mol}}$; questo valore venne confrontato con un'altra misura dell'entropia per il vapore acqueo nelle stesse condizioni finali dell'esperimento di Giauque e Stout ($45.10 \frac{\text{cal}}{K \cdot \text{mol}}$, Gordon, [57]).

La discrepanza fra le due misure ($0.82 \pm 0.05 \frac{\text{cal}}{K \cdot \text{mol}}$) fu storicamente la prima chiara indicazione dell'esistenza di una entropia residua a $T = 0 K$ per il ghiaccio. Inoltre dal punto di vista quantitativo la misura sancì il prevalere della teoria di Pauling [33], che anticipava il concetto della *ice rule* e prediceva un'entropia residua molare di $R \ln \frac{3}{2} \simeq 0.806 \frac{\text{cal}}{K \cdot \text{mol}}$, rispetto alla teoria antagonista che spiegava l'esistenza di un'entropia residua con l'esistenza dei due stati detti *ortho-water* e *para-water* e prediceva il valore di $\frac{3}{4} R \ln 2 \simeq 1.03 \frac{\text{cal}}{K \cdot \text{mol}}$ [58].

L'argomento di Pauling era il seguente: in una mole di ghiaccio ci sono N_A atomi di ossigeno e $2N_A$ atomi di idrogeno. Questi si dispongono su un reticolo tetraedrico in cui gli atomi di ossigeno occupano i siti reticolari (con numero di coordinazione 4) e gli atomi di idrogeno occupano i *links*. Ciascun atomo di idrogeno si trova quindi fra due atomi di ossigeno: la sua distanza da uno dei due (a cui è legato con un legame covalente) è minore della sua distanza dall'altro (a cui è legato con un legame idrogeno). Se ignorassimo la *ice rule*, ovvero la restrizione che ogni atomo di ossigeno formi legami covalenti con due atomi di idrogeno, le possibili configurazioni sarebbero 2^{2N_A} ; la *ice rule* consente però solo 6 delle 16 configurazioni possibili intorno a ogni atomo di ossigeno: pertanto il numero di configurazioni possibili è

$2^{2N_A} \cdot \left(\frac{6}{16}\right)^{N_A} = \left(\frac{3}{2}\right)^{N_A}$. È notevole come l'argomento di Pauling non dipenda dalla dimensionalità, ma solo dal numero di coordinazione e dalla *ice rule*.

Bibliografia

- [1] W. Heisenberg, *Zur Theorie des Ferromagnetismus*, Zeitschrift für Physik **49** n. 9-10 (1928), 619-636.
- [2] H. Bethe, *Zur Theorie der Metalle. I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette*, Zeitschrift für Physik **71** n. 3-4 (1931), 205-226.
- [3] H.-J. Mikeska e A. K. Kolezhuk, *One-Dimensional Magnetism, Lecture Notes in Physics* **645**(2004), 1-83. arXiv:cond-mat/0501603.
- [4] R. J. Birgenau, S. L. Holt, M. T. Hutchings e G. Shirane, *Spin dynamics in the one-dimensional ferromagnet $(\text{CD}_3)_4\text{NMnCl}_3$* , Phys. Rev. B **5**(1972), 1999-2014.
- [5] H.-J. Mikeska e M. Steiner, *Solitary excitations in one-dimensional magnets*, Adv. in Phys. **40**(1991), 191-356.
- [6] B. Sutherland, *Beautiful Models - 70 years of exactly solved quantum many-body problems*, World Scientific, Singapore, 1994.
- [7] N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin e V. E. Korepin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, Cambridge Monograph on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [8] L. D. Faddeev e L. A. Takhtadjan, *The quantum method of the inverse problem and the Heisenberg XYZ model*, Sov. Math. Dokl. **35**n.5 (1979), 11-68.

- [9] L. D. Faddeev e L. A. Takhtadjan, *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [10] A. V. Razumov e Yu. G. Stroganov, *Spin chains and combinatorics*, J. Phys. A **34**(2001), 3185. arXiv:cond-mat/0012141.
- [11] Yu. G. Stroganov, *The Importance of being Odd*, J. Phys. A **34**(2001), 179-186. arXiv:cond-mat/0012035.
- [12] W. H. Mills, D. P. Robbins e H. Rumsey, *Alternating-sign matrices and descending plane partitions*, J. Combin. Theory Ser. A, **34**(1983), 340-359.
- [13] D. M. Bressoud, *Proofs and Confirmations - The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*, The Mathematical Association of America, Cambridge University Press, New York, 1999.
- [14] G. Kuperberg, *Another proof of the alternating sign matrix conjecture*, Inter. Math. Res. Notes **1996**(1996), 139-150. arXiv:math.co/9712207.
- [15] D. Zeilberger, *Proof of the alternating sign matrix conjecture*, Electronic J. Comb. **3** (1996), R13. arXiv:math.co/9407211.
- [16] N. Elkies, G. Kuperberg, M. Larsen e J. Propp, *Alternating-sign matrices and domino tilings*, J. Algebraic Combin. **1**(1992), 111-132 e 219-234.
- [17] F. Colomo e A. G. Pronko, *On the refined 3-enumeration of alternating sign matrices*, Adv. Appl. Math. **34**(2005), 798-811. arXiv:math-ph/0404045.
- [18] M. T. Batchelor, J. de Gier e B. Nienhuis, *The quantum symmetric XXZ chain at $\Delta = -\frac{1}{2}$, alternating sign matrices and plane partitions*, J. Phys. A **34**(2001), L265-L270. arXiv:cond-mat/0101385.
- [19] A. V. Razumov e Yu. G. Stroganov, *Combinatorial nature of ground state vector of $O(1)$ loop model*, Theor. Math. Phys. **138**(2004), 333-337. Teor. Mat. Fiz. **138**(2004), 395-400.

- [20] R. J. Baxter, *Exactly Solvable Models in Statistical Mechanics*, Academic Press, London, 1982.
- [21] E. H. Lieb, *Residual Entropy of Square Ice*, Phys. Rev. **162**(1967), 162-172.
- [22] E. H. Lieb, *Exact Solution of the F Model of An Antiferroelectric*, Phys. Rev. Lett. **18**(1967), 1046-1048.
- [23] E. H. Lieb, *Exact Solution of the Two-Dimensional Slater KDP Model of a Ferroelectric*, Phys. Rev. Lett. **19**(1967), 108-110.
- [24] B. Sutherland, C. N. Yang e C. P. Yang, *Exact Solution of a Model of Two-Dimensional Ferroelectrics in an Arbitrary External Electric Field*, Phys. Rev. Lett. **19**(1967), 103-104.
- [25] J. C. Slater, *Theory of the Transition in KH_2PO_4* , J. Chem. Phys. **9**(1941), 16-33.
- [26] M. T. Batchelor, R. J. Baxter, M. J. O'Rourke e C. M. Jung, *Exact solution and interfacial tension of the six-vertex model with anti-periodic boundary conditions*, J. Phys. A **28**(1995), 2759-2770. arXiv:hep-th/9502040.
- [27] J. F. Nagle, *Proof of the first order phase transition in the Slater KDP model*, Commun. Math. Phys. **13**(1969), 62-67.
- [28] W. F. Giauque e J. W. Stout, *The Entropy of Water and the Third Law of Thermodynamics. The Heat Capacity of Ice from 15 to 273°K.*, J. Am. Chem. Soc. **58**(1936), 1144-1150.
- [29] P. W. Anderson, *Ordering and Antiferromagnetism in Ferrites*, Phys. Rev. **102**(1956), 1008-1013.
- [30] S. T. Bramwell, K. W. Godfrey, M. J. Harris, D. F. McMorrow e T. Zeiske, *Geometrical Frustration in the Ferromagnetic Pyrochlore $\text{Ho}_2\text{Ti}_2\text{O}_7$* , Phys. Rev. Lett. **79**(1997), 2254-2257.

- [31] S. T. Bramwell, J. D. Champion, A. L. Cornelius, T. Fennell, M. J. Harris, B. C. den Hertog, J. S. Gardner, M. J. Gingras, D. F. McMorrow, R. G. Melko e A. R. Wildes, *Spin Correlations in $\text{Ho}_2\text{Ti}_2\text{O}_7$: A Dipolar Spin System*, Phys. Rev. Lett. **87**(2001), 047205.
- [32] A. V. Isakov, R. Moessner e S. R. Sondhi, *Why Spin Ice Obeys the Ice Rules*, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 217201.
- [33] L. Pauling, *The Structure and Entropy of Ice and Other Crystals with some Randomness of Atomic Arrangement*, J. Am. Chem. Soc. **57**(1935), 2680.
- [34] F. Rys, Helv. Phys. Acta **36**(1963), 537-559.
- [35] R. J. Baxter, *Exact Isotherm for the F Model in Direct and Staggered Electric Fields*, Phys. Rev. B **1**(1970), 2199-2202.
- [36] V. E. Korepin, *Calculation of norms of the Bethe wavefuncionts*, Comm. Math. Phys. **86**(1982), 391-418.
- [37] M. Gaudin, *La Fonction d'Onde de Bethe*, Masson, Paris, 1983.
- [38] A. G. Izergin, *Partition Function of the six-vertex model in a finite volume*, Sov. Phys. Dokl. **32**(1987), 878-879.
- [39] V. E. Korepin e P. Zinn-Justin, *Thermodynamic limit of the Six-Vertex Model with Domain Wall Boundary Conditions*, J. Phys. A **33**(2000), 7053-7072. arXiv:cond-mat/0004250.
- [40] P. M. Bleher e K. Liechty, *Exact solution of the six-vertex model with domain wall boundary conditions. Ferroelectric phase.*, in preparazione. arXiv:0712.4091.
- [41] P. Zinn-Justin, *Six-Vertex Model with Domain Wall Boundary Conditions and One-Matrix Model*, Phys. Rev. E **62**(2000), 3411. arXiv:math-ph/0005008.

- [42] P. M. Bleher e V. V. Fokin, *Exact solution of the six-vertex model with domain wall boundary conditions. Disordered phase.*, Commun. Math. Phys. **268**(2006), 223-284.
- [43] P. M. Bleher e K. Liechty, *Exact solution of the six-vertex model with domain wall boundary conditions. Critical line between ferroelectric and disordered phases.*, in preparazione. arXiv:0802.0690.
- [44] K. Eloranta, *Diamond ice*, J. Stat. Phys. **96**(1999), 1091-1109.
- [45] O. F. Syljuåsen e M. B. Zvonarev, *Monte-Carlo simulations of vertex models*, Phys. Rev. E **70**(2004), 016118.
- [46] D. Allison e N. Reshetikhin, *Numerical study of the 6-vertex model with domain wall boundary conditions*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **55**(2005), 1847-1869.
- [47] K. Palamarchuk e N. Reshetikhin, *The six-vertex model with fixed boundary conditions*, in preparazione.
- [48] W. Jockusch, J. Propp e P. Shor, *Random Domino Tilings and the Arctic Circle Theorem*, preprint (1998). arXiv:math/9801068.
- [49] F. Colomo e A. G. Pronko, *Square ice, alternating sign matrices and classical orthogonal polynomials*, J. Stat. Mech. **0501**(2005), 005. arXiv:math-ph/0411076.
- [50] R. J. Baxter, Adv. Stud. in Pure Math. **19**(1989), 95.
- [51] C. N. Yang e C. P. Yang, *One-Dimensional Chain of Anisotropic Spin-Spin Interactions. I. Proof of Bethe's Hypothesis for Ground State in a Finite System.*, Phys. Rev. **150**(1966), 321-327.
- [52] N. M. Bogoliubov, A. G. Pronko e M. B. Zvonarev, *Boundary correlation functions in the six-vertex model*, Phys. Rev. E **65**(2002), 5525-5541.

- [53] Yu. G. Stroganov, *A new way to deal with Izergin-Korepin determinant at root of unity, preprint* (2002). arXiv:math-ph/0204042.
- [54] R. J. Baxter, *Completeness of the Bethe Ansatz for the six-vertex and eight-vertex models*, J. Stat. Phys. **108**(2002), 1-48. arXiv:cond-mat/0111188.
- [55] F. Colomo e A. G. Pronko, *Emptiness formation probability in the domain-wall six-vertex model*, Nucl. Phys. B (2008), in stampa. arXiv:0712.1524.
- [56] B. A. Berg, C. Muguruma e Y. Okamoto, *Residual entropy of ice from multicanonical simulations*, Phys. Rev. B **75**(2007), 092202.
- [57] A. R. Gordon, J. Chem. Phys. **2**(1934), 65.
- [58] M. F. Ashley e W. F. Giaque, *Molecular rotation in Ice at 10° K. Free Energy of Formation and Entropy of Water*, Phys. Rev. **43**(1933), 81.

Ringraziamenti

Comunemente il primo grazie va al proprio relatore, e non desidero fare eccezione. Ringrazio quindi il dottor Colomo per avermi iniziato a questo settore della fisica matematica e per avermi proposto un argomento così interessante; e ringrazio Filippo per essere stato un relatore disponibile, gentile e paziente, nonché per i numerosi consigli e le piacevoli chiacchierate non solo di argomenti tecnici. Mi piacerebbe non perderci di vista.

A vario titolo mi hanno aiutato durante questo anno di lavoro anche il dottor Andrea Cappelli (Firenze), il professor Paul Fendley (Virginia) e il dottor Andrei Pronko (San Pietroburgo).

I colleghi laureandi della *stanzina teorici* (Alessio, Alessio, Francesco, Jacopo, Jacopo, Luca, Massimo) hanno fornito continuo supporto morale, saltuario aiuto pratico e costante rifornimento di dibattiti su argomenti più o meno seri.

Gli utenti del forum del Gruppo Utilizzatori Italiani di Latex su internet mi sono stati preziosi, anche se non lo sanno.

La mia famiglia, non umani inclusi, mi ha sopportato soprattutto durante le fasi di massima concentrazione. Qualche volta qualcuno ha anche finto di credere che stessi facendo qualcosa di interessante.

Naturalmente l'ultimo ringraziamento è per Martina, mia amante, aiuto cuoco, autista, chimica di fiducia, consigliera personale, entraîneuse, infermiera, massaggiatrice, modella, navigatrice, psicoterapeuta, segretaria, tifosa e umorista.

Vorrei chiudere dicendo a tutti coloro che amano la Fisica e la Matematica che

neanche io riesco a fare altrimenti.

Questa tesi di laurea è dedicata a tutti (e soli) coloro che non dedicano la propria tesi di laurea a se stessi.