

Metodi Matematici per la Fisica Teorica

Sessione Primaveraile, Giovedì 09/04/2015

Compito scritto

1) Si calcoli

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x+a)\sqrt{x}} dx,$$

per a reale positivo.

2) Data l'espressione

$$I(x, N) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \left(\frac{1+z}{2z^x} \right)^N \frac{dz}{1-z},$$

con $x \in (0, 1)$, si valuti il termine dominante della sua espansione asintotica per $N \rightarrow \infty$.

3) Si determini un isomorfismo di algebre di Lie complesse fra $\mathfrak{so}(4, \mathbb{C})$ e

$$\mathfrak{so}(4, \mathbb{C}; f) = \{X \in M_4(\mathbb{C}), f(u, Xv) + f(Xu, v) = 0, \forall u, v \in \mathbb{C}^4\},$$

dove $f(u, v) = u^t g v$ e $g \in M_4(\mathbb{C})$ è la matrice a blocchi

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[Si raccomanda di lavorare con matrici a blocchi.]

4) Si scelga una subalgebra di Cartan per $\mathfrak{so}(4, \mathbb{C})$; si determinino le radici e le radici semplici.

[Si utilizzi l'algebra isomorfa $\mathfrak{so}(4, \mathbb{C}; f)$ discussa nell'Esercizio 3, determinando la forma generica di $X \in \mathfrak{so}(4, \mathbb{C}; f)$ e scegliendo come subalgebra di Cartan la subalgebra delle matrici diagonali.]