

# Metodi Matematici per la Fisica Teorica

Sessione Invernale, Martedì 13 Febbraio 2018

Compito scritto

1) Si calcoli il valore dell'integrale

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x+3} \frac{1}{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} dx .$$

2) Data l'equazione differenziale

$$z^2(z^2 - 1)u'' + 2z^3u' + \alpha(\alpha + 1)u = 0 ,$$

- si determinino le singularità Fuchsiane ed i relativi indici;
- si scriva il  $P$ -simbolo dell'equazione;
- si scriva la soluzione generale nell'intorno dell'origine, in termini di funzioni ipergeometriche.

3) Siano  $\{a_i, a_i^\dagger\}_{i=1}^N$  operatori bosonici di creazione e distruzione che agiscono sullo spazio di Fock  $\mathcal{H}_N = \langle |n_1, \dots, n_N\rangle, n_i \in \mathbb{N} \rangle$

$$a_i |n_1, \dots, n_N\rangle = \sqrt{n_i} |n_1, \dots, n_i - 1, \dots, n_N\rangle$$

$$a_i^\dagger |n_1, \dots, n_N\rangle = \sqrt{n_i + 1} |n_1, \dots, n_i + 1, \dots, n_N\rangle .$$

Si consideri la rappresentazione  $\varphi : \mathfrak{sl}(N, \mathbb{C}) \rightarrow GL(\mathcal{H}_N)$  definita dalla *mappa di Jordan*

$$\varphi(X) = \sum_{i,j=1}^N X_{ij} a_i^\dagger a_j , \quad X \in \mathfrak{sl}(N, \mathbb{C}) .$$

Per ogni  $N \geq 2$ , determinare quali rappresentazioni irriducibili compaiono in questa rappresentazione. [Si determinino i vettori di peso massimo].

4) Determinare la segnatura di  $\mathfrak{so}(n, n)$ .