

Analisi funzionale

versione 14-6-10

Indice

1	Spazi metrici, normati, di Hilbert	3
1.1	Spazi metrici	3
1.2	Spazi normati, spazi di Banach	6
1.3	Spazi con prodotto interno, spazi di Hilbert	8
1.4	Sistemi di funzioni ortogonali in L^2	13
2	Distribuzioni	17
2.1	Spazio \mathcal{D} di funzioni test	17
2.2	Distribuzioni in \mathcal{D}	18
2.3	Operazioni sulle distribuzioni	20
2.4	Distribuzioni temperate	24
2.5	Successioni di distribuzioni	26
2.6	Prodotto diretto di distribuzioni e prodotto di convoluzione	31
3	Trasformata di Fourier di distribuzioni temperate	33
4	Soluzioni fondamentali	36
5	Funzionali limitati e teorema di Riesz	41
6	Operatori lineari	43
6.1	Operatori limitati	43
6.2	Operatore inverso	46
6.3	Operatore aggiunto	47
6.4	Operatori non limitati	50
7	Criteri per l'autoaggiuntezza	56
8	Elementi di teoria spettrale degli operatori	58
8.1	Spettro di un operatore	58
8.2	Spettri di operatori simmetrici, autoaggiunti, unitari	61
9	Operatori compatti	63
10	Teoria spettrale e decomposizione spettrale	65
11	Rigged Hilbert space	69

1 Spazi metrici, normati, di Hilbert

L'analisi funzionale trae i suoi sviluppi all'inizio del XX secolo dai lavori di tesi di dottorato di Lebesgue (1902) sulla integrazione, di Frechet (1906) sugli spazi metrici, dall'articolo di Hilbert del 1912 sui fondamenti di una teoria generale delle equazioni integrali. Ulteriori contributi rilevanti saranno poi dati dalla tesi di Banach (1920), da Sobolev, Neumann, Schwartz e Riesz.

Parecchi problemi cui siamo interessati trattano non una singola funzione ma un insieme di funzioni. In molti casi poi saremo interessati al caso in cui questo insieme di funzioni è uno spazio vettoriale. Inoltre poiché spesso i processi di limite risultano importanti è necessario dotare questi spazi di metriche o almeno di topologie. Gli spazi metrici svolgono nell'analisi funzionale il ruolo della retta \mathbf{R} nell'analisi.

1.1 Spazi metrici

Definizione Uno *spazio metrico* è una coppia (X, d) dove X è un insieme e d una metrica ovvero una funzione definita su $X \times X$ che ad ogni coppia di elementi $x, y \in X$ associa un numero reale $d(x, y)$ detto la *distanza* tra x e y tale che valgono le proprietà seguenti

$$i) \quad d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \quad \text{se e solo se } x = y \quad (1.1)$$

$$ii) \quad d(x, y) = d(y, x) \quad (1.2)$$

$$iii) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad (1.3)$$

L'ultima disuguaglianza è la cosiddetta *disuguaglianza triangolare*.

La funzione d si dice *distanza* o *metrica*.

Un *sottospazio* (Y, \bar{d}) è un sottoinsieme $Y \subset X$ con la restrizione della metrica d a $Y \times Y$.

Diamo alcuni esempi di spazi metrici.

Esempio 1. La retta reale \mathbf{R} con la distanza $d(x, y) = |x - y|$.

Esempio 2. Il piano complesso \mathbf{C} con la distanza $d(x, y) = |x - y|$

Esempio 3. Lo spazio \mathbf{R}^n può esser dotato di varie distanze date da

$$d_p(x, y) = [|x_1 - y_1|^p + \dots + |x_n - y_n|^p]^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty \quad (1.4)$$

e

$$d_\infty = \sup\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} \quad (1.5)$$

dove $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ sono due elementi di \mathbf{R}^n .

La metrica d_2 è la *metrica euclidea*. Gli spazi metrici (\mathbf{R}^n, d_p) sono tutti distinti.

Allo scopo di dimostrare la disuguaglianza triangolare in (\mathbf{R}^n, d_2) , dimostriamo la disuguaglianza di Cauchy

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2 \quad (1.6)$$

Questa segue dall'identità

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_j - b_i a_j)^2 \quad (1.7)$$

La disuguaglianza di Cauchy permette di ricavare

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \right)^2 \quad (1.8)$$

da cui, estraendo la radice, e scegliendo $a_k = x_k - z_k$ e $b_k = z_k - y_k$, segue la disuguaglianza triangolare.

Esempio 4. Consideriamo come insieme X l'insieme delle funzioni continue a valori reali o complessi, definite per $x \in [a, b]$ ovvero $C([a, b]; \mathbf{R})$ o $C([a, b]; \mathbf{C})$. Possiamo definire in questi spazi le metriche seguenti ($1 \leq p < \infty$, non necessariamente intero)

$$\begin{aligned} d_1(f, g) &= \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \\ d_2(f, g) &= \left[\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx \right]^{1/2} \\ &\dots \\ d_p(f, g) &= \left[\int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx \right]^{1/p} \\ d_\infty(f, g) &= \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)| \end{aligned} \quad (1.9)$$

Possiamo considerare di conseguenza gli spazi metrici distinti (X, d_p) .

Esempio 5. Spazi l^p . Sia $p \geq 1$ un numero reale. Per definizione ciascun elemento di l^p è una successione di numeri complessi

$$x = \{\xi_i\} = (\xi_1, \xi_2, \dots) \quad (1.10)$$

tale che

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty \quad (1.11)$$

La metrica è definita da

$$d(x, y) = \left[\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p \right]^{1/p} \quad (1.12)$$

l^p è in generale uno spazio metrico.

Per $p = 2$ otteniamo il famoso spazio delle successioni di Hilbert l^2 . Questo spazio fu introdotto e studiato da D. Hilbert (1912) ed è il primo esempio di spazio di Hilbert. ■

Incominciamo col ridefinire una serie di concetti già incontrati in \mathbf{R} o \mathbf{C} . Denoteremo semplicemente con X lo spazio metrico (X, d) .

Definizione Dato un punto $x_0 \in X$ ed un numero reale $r > 0$ definiamo

$$\begin{aligned} B(x_0, r) &= \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\} && \text{sfera aperta} \\ \bar{B}(x_0, r) &= \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\} && \text{sfera chiusa} \end{aligned} \quad (1.13)$$

x_0 è il *centro* e r il *raggio*.

Definizione Un sottoinsieme M di uno spazio metrico X è detto *aperto* se $\forall x \in M$ esiste una sfera aperta $B(x, r) \subset M$.

Un insieme è detto *chiuso* se il suo complemento in X è aperto. ■

Una sfera aperta $B(x_0, \epsilon)$ è chiamato anche un ϵ -intorno. Per intorno di x_0 intendiamo ogni sottoinsieme di X che contiene un ϵ -intorno di x_0 . Chiamiamo un punto x_0 di un insieme $M \subset X$ *punto interno* se M è un intorno di x_0 .

Possiamo definire poi il concetto di punto di accumulazione nel modo usuale e la *chiusura* \bar{M} di un insieme come l'insieme costituito da M e dai punti di accumulazione di M .

Definizione Un sottoinsieme M di uno spazio metrico è detto (*ovunque*) *denso* in X se $\bar{M} = X$. X è detto *separabile* se possiede un sottoinsieme numerabile che è denso in X .

Definizione Un insieme M si dice *limitato* se esiste un numero $m > 0$ tale che $d(x, y) \leq m \forall x, y \in M$.

Definizione Una successione $\{x_n\}$ in uno spazio metrico X è detta *convergente* se esiste un $x \in X$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$. Scriveremo anche $x_n \rightarrow x$. Se $\{x_n\}$ non è convergente, la successione è detta *divergente*.

Definizione Un insieme M si dice *compatto* se ogni successione di punti in M contiene una sottosuccessione convergente. M è *relativamente compatto* se \bar{M} è compatto.

Definizione Una successione $\{x_n\}$ in uno spazio metrico X è detta di *Cauchy* se $\forall \epsilon > 0$ esiste un $N(\epsilon)$ tale che $d(x_n, x_m) < \epsilon$ per ogni $m, n > N$.

Lo spazio è detto *completo* se ogni successione di Cauchy è convergente.

Teorema Ogni successione convergente in uno spazio metrico è una successione di Cauchy.

Dimostrazione. Se $x_n \rightarrow x$, allora $\forall \epsilon > 0$ c'è un N tale che

$$d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n > N \quad (1.14)$$

Pertanto

$$d(x_m, x_n) < d(x_m, x) + d(x, x_n) < \epsilon \quad \forall n, m > N \quad \blacksquare \quad (1.15)$$

Analogamente diremo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ è convergente se è convergente la successione delle somme parziali.

Teorema Sia M un sottoinsieme di uno spazio metrico X e sia \bar{M} la sua chiusura. Allora $x \in \bar{M}$ se e solo se esiste una successione $\{x_n\}$ in M tendente ad x . M è chiuso se e solo se $x_n \in M$, e $x_n \rightarrow x$ implica $x \in M$.

Dimostrazione.

Sia $x \in \bar{M}$. Se $x \in M$ una tale successione è $(x, x \cdots, x)$. Se $x \notin M$ allora è un punto di accumulazione. Quindi per $n = 1, 2, 3, \dots$ la sfera $B(x, 1/n)$ contiene un $x_n \in M$, e $x_n \rightarrow x$ come $n \rightarrow \infty$. Viceversa se $x_n \in M$ e $x_n \rightarrow x$ con $x \in M$, ogni intorno di x contiene punti di M diversi da x , quindi x è punto di accumulazione di M quindi $x \in \bar{M}$.

Infine dato che M è chiuso, M coincide con \bar{M} . Pertanto la seconda parte del teorema segue dalla prima.

Teorema Un sottospazio M di uno spazio metrico completo è completo se e solo se l'insieme M è chiuso.

Dimostrazione. Vedi [1] pag. 30.

Se lo spazio metrico M non è completo, lo si può sempre includere in uno spazio completo M^* con una procedura che si chiama *completamento*, in modo che $M \subset M^*$, $\bar{M} = M^*$.

Esempio 6 La retta reale è separabile. Infatti il sottoinsieme \mathbf{Q} dei razionali è denso in \mathbf{R} . Lo spazio \mathbf{Q} dei razionali con la metrica $d(x, y) = |x - y|$ non è completo. Il suo completamento è \mathbf{R} .

Esempio 7 Poiché il limite uniforme di una successione di funzioni continue è una funzione continua, ne segue che $C[a, b], d_{\infty}$ è completo.

1.2 Spazi normati, spazi di Banach

Ricordiamo la definizione di spazio vettoriale.

Definizione Uno *spazio vettoriale* su un campo \mathbf{K} è un insieme X con due operazioni algebriche. L'addizione vettoriale associa ad ogni coppia (x, y) un vettore $x + y$ in modo che valgano le proprietà commutativa ed associativa della addizione. Inoltre esiste il vettore 0 (zero o nullo) e l'inverso $-x$ che soddisfano

$$\begin{aligned} x + 0 &= x \\ x + (-x) &= 0 \end{aligned}$$

La moltiplicazione per $\alpha \in \mathbf{K}$ associa ad ogni vettore x il vettore αx , in modo che

$$\begin{aligned}\alpha(\beta x) &= (\alpha\beta)x \\ 1x &= x \\ \alpha(x+y) &= \alpha x + \alpha y \\ (\alpha+\beta)x &= \alpha x + \beta x\end{aligned}$$

per $x, y \in X$ e $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$. ■

Un *sottospazio* di uno spazio vettoriale X è un sottoinsieme non vuoto Y di X , tale da soddisfare le proprietà dello spazio vettoriale con la restrizione delle operazioni a Y .

Un insieme di vettori x_1, \dots, x_n è *linearmente dipendente* se esistono dei numeri a_1, \dots, a_n tali che

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0 \quad (1.16)$$

I vettori sono *linearmente indipendenti* se l'eq. (1.16) implica $a_1 = \dots = a_n = 0$.

Per ogni sottoinsieme $M \subset X$ di vettori, non necessariamente linearmente indipendenti, l'insieme delle loro combinazioni lineari è detto *span* di M .

Uno spazio X è detto *finito dimensionale* se esiste un intero positivo n tale che X contiene un insieme linearmente indipendente di n vettori, mentre ogni insieme di $n+1$ vettori è linearmente dipendente. Per definizione $\dim X = 0$ se $X = \{0\}$. Se X non è finito dimensionale, è *infinito dimensionale*.

Definizione Uno spazio normato è uno spazio vettoriale X su un campo \mathbf{K} su cui è definita una funzione (*norma*) $x \rightarrow \|x\|$ con le proprietà

$$i) \quad \|x\| \geq 0, \quad (1.17)$$

$$ii) \quad \|x\| = 0 \quad \text{se e solo se } x = 0 \quad (1.18)$$

$$iii) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \alpha \in \mathbf{K} \quad (1.19)$$

$$iv) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{disuguaglianza triangolare} \quad (1.20)$$

Una norma su X induce una metrica data da $d(x, y) = \|x - y\|$.

Definizione Uno spazio normato completo nella metrica indotta dalla norma è detto *spazio di Banach*.

Esempio Lo spazio metrico $(C[a, b], d_\infty)$ è completo.

Esempio Lo spazio metrico $(C[a, b], d_2)$ non è completo. Per esempio la successione di funzioni continue

$$\begin{aligned} & 1 \quad \text{per } a \leq x \leq \frac{a+b}{2} \\ u_k(x) &= 1 - k\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \quad \text{per } \frac{a+b}{2} \leq x \leq \frac{a+b}{2} + \frac{1}{k} \\ & 0 \quad \text{per } \frac{a+b}{2} + \frac{1}{k} \leq x \leq b \end{aligned} \quad (1.21)$$

è successione di Cauchy nella metrica d_2 ma converge per $k \rightarrow \infty$ alla funzione discontinua $\theta(x - \frac{a+b}{2})$.

Il completamento di questo spazio è $L^2[a, b]$. Lo spazio $L^2[a, b]$ è separabile, poichè il set di tutti i polinomi, che è numerabile, è denso in $L^2[a, b]$. In modo simile anche $L^2(\mathbf{R})$ è separabile.

Esempio Consideriamo l'insieme $L^1(\mathbf{R})$ ovvero l'insieme delle funzioni integrabili in \mathbf{R} . Dato che una combinazione lineare di funzioni integrabili è ancora integrabile, questo insieme ha la struttura di spazio vettoriale. Possiamo definire una norma come

$$\|f\| = \int_{\mathbf{R}} |f(x)| dx \quad (1.22)$$

E' chiaro che valgono la (1.18) e la (1.19). Tuttavia affinché sia verificata la (1.17), ovvero

$$\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0 \quad (1.23)$$

occorre considerare come elementi di L^1 le classi di equivalenza costituite dalle funzioni uguali quasi ovunque. In particolare l'elemento nullo è costituito dalle funzioni che sono zero quasi ovunque.

Quindi L^1 è lo spazio normato i cui elementi sono classi di funzioni integrabili uguali quasi ovunque.

Lo spazio L^1 è completo [2].

1.3 Spazi con prodotto interno, spazi di Hilbert

Definizione Uno spazio con prodotto interno o prehilbertiano è uno spazio vettoriale su cui è definita una applicazione da $X \times X$ sul campo \mathbf{K} , detta *prodotto interno*, $(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$ con le proprietà seguenti

$$\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \quad (1.24)$$

$$\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \quad \alpha \in \mathbf{K} \quad (1.25)$$

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad (1.26)$$

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \quad (1.27)$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \quad \text{se e solo se } x = 0 \quad \blacksquare \quad (1.28)$$

Se X è uno spazio reale abbiamo al posto della eq.(1.26) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$. Uno spazio con prodotto interno ha una norma data da $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. La norma indotta dal prodotto interno soddisfa l'*identità del parallelogramma*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (1.29)$$

Il prodotto interno soddisfa la disuguaglianza di Schwarz.

Teorema (Disuguaglianza di Schwarz). Abbiamo

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \quad (1.30)$$

Dimostrazione. Per ogni coppia x, z è $\langle x - z, x - z \rangle \geq 0$. Quindi

$$\langle x, x \rangle \geq \langle z, x \rangle + \langle x, z \rangle - \langle z, z \rangle = 2\operatorname{Re} \langle z, x \rangle - \langle z, z \rangle \quad (1.31)$$

Se $y = 0$ la disuguaglianza di Schwarz è banalmente soddisfatta. Sia $y \neq 0$ e poniamo $z = (\langle y, x \rangle / \langle y, y \rangle)y$. Allora

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &\geq 2\operatorname{Re} \frac{\langle \langle y, x \rangle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} - \frac{|\langle y, x \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \\ &= 2 \frac{|\langle y, x \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} - \frac{|\langle y, x \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \\ &= \frac{|\langle y, x \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (1.32)$$

Teorema Continuità del prodotto interno. Se in uno spazio con prodotto interno X , $x_n \rightarrow x$, allora per ogni $y \in X$ è $\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$.

Dimostrazione. E' infatti

$$|\langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle|^2 = |\langle x_n - x, y \rangle|^2 \leq \|x_n - x\|^2 \|y\|^2 \quad (1.33)$$

In modo analogo se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$ anche $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle$.

Definizione Uno spazio con prodotto interno e completo nella metrica indotta dallo stesso prodotto interno è detto *spazio di Hilbert*.

La definizione assiomatica di spazio di Hilbert fu data da Hilbert e Von Neumann (1927-28) in alcuni articoli sulla meccanica quantistica.

Teorema (del sottospazio) Sia Y un sottospazio di uno spazio di Hilbert H . Allora

- i) Y è completo se e solo se è chiuso
- ii) se Y è finito dimensionale, allora Y è completo.

Dimostrazione. i) Sia Y chiuso. Sia x_n una successione di Cauchy in $Y \subset H$. Poiche' H è completo $x_n \rightarrow x$ in H . Poiche' Y è chiuso $x_n \rightarrow x$ implica $x \in Y$. Quindi ogni successione di Cauchy in Y è convergente in Y .

Viceversa sia Y completo. Per ogni $x \in \bar{Y}$ c'è una successione $x_n \rightarrow x$ con $x_n \in Y$. Poiche' x_n è una successione di Cauchy in Y e Y è completo ne segue che $x \in Y$. Pertanto $Y \subset \bar{Y}$ e quindi $Y = \bar{Y}$.

- ii) Segue dalla completezza dei numeri complessi, vedi [1].

In particolare quindi tutti gli spazi di Hilbert di dimensione finita sono completi.

Esempio 1 Gli spazi $\mathbf{R}^n(\mathbf{C}^n)$ delle n ple di numeri reali (complessi) con prodotto interno definito da

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i) \quad (1.34)$$

sono spazi di Hilbert.

Esempio 2 Dato lo spazio l^2 , definiamo il prodotto interno con

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{x}_i y_i \quad (1.35)$$

dove $x = (x_1, x_2, \dots)$ e $y = (y_1, y_2, \dots)$ sono successioni in l^2 . Si dimostra che l^2 è completo e quindi costituisce uno spazio di Hilbert. l^2 è separabile ed ogni spazio di Hilbert separabile è isomorfo a l^2 .

Esempio 3 Lo spazio $L^2[a, b]$. La norma è definita, nel caso di funzioni a valori reali, da

$$\|f\| = \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right)^{1/2} \quad (1.36)$$

e può esser ottenuta dal prodotto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx \quad (1.37)$$

Nel caso di funzioni a valori complessi sarà

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(x)}g(x)dx \quad (1.38)$$

Questa definizione ha senso dato che

$$|\overline{f(x)}g(x)| = |\overline{f(x)}||g(x)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|^2 + \frac{1}{2}|g(x)|^2 \quad (1.39)$$

e quindi $\overline{f(x)}g(x) \in L^1[a, b]$. Come abbiamo già visto lo spazio $L^2[a, b]$ è separabile, poiché ogni funzione continua può esser arbitrariamente approssimata da un polinomio definito in $[a, b]$ e l'insieme delle funzioni continue in $[a, b]$ è denso in $L^2[a, b]$. Si dimostra che $L^2[a, b]$ è completo nella norma (1.36), (vedi per es. [16] p.68).

Definizione Se X è finito dimensionale e B è un sottoinsieme di X di vettori linearmente indipendenti tale che $X = \text{span}B$ allora B è detto una *base*.

Definizione Due vettori $x, y \in H$ sono *ortogonali* se $\langle x, y \rangle = 0$. Un insieme di vettori $x_i \in H$ è detto un *sistema ortonormale* se $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ per $i \neq j$ e $\langle x_i, x_i \rangle = 1$ per ogni i .

Definizione Somma diretta. Sia M un sottospazio di uno spazio di Hilbert. Se esiste un sottospazio N tale che $H = M + N$, ovvero ogni $x \in H$ si scrive in un sol modo come

somma di un elemento di M e uno di N , $M \cap N = \{0\}$, H si dice *somma diretta* e si usa la notazione $H = M \oplus N$.

Sia M un sottospazio di uno spazio di Hilbert H . Denotiamo con M^\perp l'insieme dei vettori di H che sono ortogonali a M . M^\perp è detto *complemento ortogonale* di M . M^\perp è un sottospazio vettoriale di H ed inoltre è chiuso. Infatti se $\{x_i\}$ è una successione in M^\perp tendente a $x \in H$, dalla continuità del prodotto interno segue $\langle x, y \rangle = 0 \forall y \in M$ e quindi $x \in M^\perp$.

Teorema Sia H uno spazio di Hilbert. Sia M un sottospazio chiuso di H . Allora per ogni $x \in H$ esiste un unico elemento $z \in M$ tale che

$$d = \|x - z\| = \inf_{y \in M} \|x - y\| \quad (1.40)$$

Dimostrazione. L'insieme dei numeri $\|x - y\|$ con $y \in M$ è limitato inferiormente, quindi possiamo definire $d = \inf_{y \in M} \|x - y\|$. Per definizione di d esiste una successione $\{y_n\}$ $y_n \in M$ tale che

$$\|x - y_n\| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} d \quad (1.41)$$

Allora

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= \|y_n - x - (y_m - x)\|^2 \\ &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \| -2x + y_n + y_m \|^2 \\ &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\|x - \frac{1}{2}(y_n + y_m)\|^2 \\ &\leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4d^2 \\ &\rightarrow_{m, n \rightarrow \infty} 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0 \end{aligned} \quad (1.42)$$

dove abbiamo utilizzato la identità del parallelogramma e dato che $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in M$ si ha $\|x - \frac{1}{2}(y_n + y_m)\| \geq d$ (d essendo estremo inferiore).

Quindi $\{y_n\}$ è una successione di Cauchy e poichè M è chiuso (e quindi completo) $\{y_n\}$ converge ad un elemento z di M . L'unicità si dimostra facilmente con l'identità del parallelogramma.

Teorema (della proiezione) Sia H uno spazio di Hilbert e M un sottospazio chiuso. Allora ogni vettore $x \in H$ si può scrivere in un sol modo come $y + z$ con $z \in M$ e $y \in M^\perp$.

Dimostrazione. Sia $x \in H$. Per il teorema precedente esiste un unico elemento $z \in M$ a distanza minima. Definiamo $y = x - z$, quindi $x = y + z$. Sia $w \in M$. Allora se $d = \|x - z\|$ e $t \in \mathbf{R}$ abbiamo

$$\begin{aligned} d^2 &\leq \|x - (z + tw)\|^2 = \|y - tw\|^2 \\ &= d^2 - 2t \operatorname{Re} \langle w, y \rangle + t^2 \langle w, w \rangle \end{aligned} \quad (1.43)$$

Pertanto $-2t \operatorname{Re} \langle w, y \rangle + t^2 \langle w, w \rangle \geq 0$ per ogni t , che implica, scegliendo $t = \operatorname{Re} \langle w, y \rangle / \langle w, w \rangle$, $\operatorname{Re} \langle w, y \rangle = 0$. In modo analogo prendendo it al posto di t si dimostra $\operatorname{Im} \langle w, y \rangle = 0$. Quindi $y \in M^\perp$. L'unicità si dimostra facilmente. ■

Quindi $H = M \oplus M^\perp$. z è anche chiamato *proiezione ortogonale* di x su M (termine motivato dalla geometria elementare). Questa decomposizione permette anche di definire un mapping

$$\begin{aligned} P : H &\rightarrow M \\ x &\rightarrow z = Px \end{aligned}$$

P è chiamato *proiezione* (operatore di proiezione o proiettore) e soddisfa la condizione $P^2 = P$ (è idempotente).

Teorema Se M è un sottospazio chiuso allora $(M^\perp)^\perp = M$.

Dimostrazione. Infatti è ovvio che $M \subset (M^\perp)^\perp$ (se $x \in M$ allora è anche $x \in (M^\perp)^\perp$). D'altra parte

$$H = M \oplus M^\perp = M^\perp \oplus (M^\perp)^\perp \quad (1.44)$$

e quindi M non può essere un sottospazio proprio di $(M^\perp)^\perp$.

Si ha inoltre se $M \subset N$, $N^\perp \subset M^\perp$. Infatti ogni elemento ortogonale a N è ortogonale anche a M . Infine se M non è chiuso $M^\perp = \bar{M}^\perp$. Infatti per la proprietà precedente $\bar{M}^\perp \subset M^\perp$. Inoltre se $x \in M^\perp$ e $y \in \bar{M}$, sia $y_n \in M$ una successione tendente a $y \in \bar{M}$. Allora $\langle y_n, x \rangle \rightarrow \langle y, x \rangle = 0$ e quindi $x \in \bar{M}^\perp$, da cui si deduce $M^\perp \subset \bar{M}^\perp$. Combinando i due risultati segue $M^\perp = \bar{M}^\perp$. Di conseguenza se M non è chiuso è $(M^\perp)^\perp = \bar{M}$.

Definizione Un insieme B di vettori ortonormali è detto un *insieme (o sistema) ortonormale e completo* in H se $\overline{Span B} = H$.

Esso è detto anche una base anche se non è una base nel senso dell'algebra, a meno che H non sia finito dimensionale.

Teorema In ogni spazio di Hilbert $H \neq \{0\}$ esiste una base ortonormale e completa.

Dimostrazione. Vedi [5] pag. 44.

Teorema Se $\{e_i\}$ con $i = 1, 2, \dots$ è un insieme ortonormale in H (separabile) le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- i) $\{e_i\}$ è completo
- ii) $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, x \rangle e_i \quad \forall x \in H$
- iii) $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle \quad \forall x, y \in H$
- iv) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 \quad \forall x \in H$

Dimostrazione.

i) \rightarrow ii). Il vettore $x - \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, x \rangle e_i$ è ortogonale ad ogni e_i ; quindi

$$x - \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, x \rangle e_i \in Span(e_i)^\perp = \overline{Span(e_i)}^\perp = H^\perp = \{0\} \quad (1.45)$$

Pertanto $x - \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, x \rangle e_i$ è uguale al vettore nullo.

ii) \rightarrow iii). Dalla continuità del prodotto scalare segue

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle \quad (1.46)$$

iii) \rightarrow iv). Basta porre $y = x$.

iv) \rightarrow i). Se x è ortogonale a tutti gli e_i dalla iv) segue $x = 0$, e quindi $\text{Span}(e_i)^\perp = \{0\} = H^\perp$ da cui segue $\overline{\text{Span}(e_i)} = H$.

Nel caso finito e infinito dimensionale ma separabile la procedura di Gram Schmidt permette di costruire una base ortonormale.

Teorema Ortogonalizzazione di Gram Schmidt. Sia $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ un insieme finito di vettori linearmente indipendenti. Allora esiste un sistema ortonormale $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ tale che $\text{Span}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \text{Span}(h_1, h_2, \dots, h_n)$.

Dimostrazione. Il primo elemento è dato da

$$e_1 = \frac{1}{\|h_1\|} h_1 \quad (1.47)$$

Il secondo è dato da

$$e_2 = \frac{1}{\|g_2\|} g_2 \quad g_2 = h_2 - \langle e_1, h_2 \rangle e_1 \quad (1.48)$$

Il generico è dato da

$$e_k = \frac{1}{\|g_k\|} g_k \quad g_k = h_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle e_j, h_k \rangle e_j \quad (1.49)$$

Questa procedura si estende per induzione al caso in cui si abbia un'infinità numerabile di vettori.

1.4 Sistemi di funzioni ortogonali in L^2

Serie di Fourier Consideriamo lo spazio $L^2(-\pi, \pi)$ delle funzioni a quadrato integrabile sull'intervallo $[-\pi, \pi]$. Un sistema ortogonale completo è dato dalle funzioni periodiche $\exp inx$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = 0 \quad (1.50)$$

per $n \neq m$ e

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = 2\pi \quad (1.51)$$

per $n = m$. Se $f \in L^2(-\pi, \pi)$ sarà allora

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (1.52)$$

con

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (1.53)$$

La completezza del sistema segue dal fatto che ogni funzione in $L^2(-\pi, \pi)$ può essere approssimata da una funzione continua e ogni funzione continua può essere approssimata da una funzione continua periodica.

Consideriamo altri esempi di spazi di Hilbert separabili, come

$$L^2[-1, 1] \quad L^2(\mathbf{R}) \quad L^2[a, \infty) \quad (1.54)$$

e costruiamo con la procedura di Gram-Schmidt un sistema ortonormale e completo partendo dallo spazio dei monomi $(1, x, x^2, \dots)$. Nelle applicazioni è utile definire insiemi ortogonali rispetto ad una misura $d\mu(x) = s(x)dx$:

$$\int_a^b s(x) \overline{e_i(x)} e_j(x) dx = \delta_{ij} \quad (1.55)$$

con $s(x) > 0$. Il prodotto interno sarà dato da

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b s(x) \overline{f(x)} g(x) dx \quad (1.56)$$

Polinomi di Legendre Consideriamo in $L^2([-1, 1]; \mathbf{R})$ l'insieme dei polinomi $1, x, x^2, \dots$. Ricordiamo che $L^2[a, b]$ è il completamento di $C[a, b]$ e che inoltre per il teorema di Weierstrass ogni funzione in $C[a, b]$ può essere approssimata da un polinomio.

Applicando la procedura di Gram Schmidt agli $h_k(x) = x^k$ possiamo ottenere una successione ortogonale $\{g_k\}$. Invece di normalizzare i vettori a 1 richiederemo $P_k(1) = 1$. Quindi $P_0(x) = 1$ e

$$P_k(x) = g_k(x)/g_k(1) \quad g_k = h_k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\langle P_j, h_k \rangle}{\langle P_j, P_j \rangle} P_j \quad (1.57)$$

Si ottengono allora i polinomi di Legendre:

$$P_0(x) = 1 \quad P_1(x) = x \quad P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2} \dots \quad (1.58)$$

Si ha $\overline{\text{Span}\{P_n\}} = L^2([-1, 1]; \mathbf{R})$. Valgono la relazione di ortogonalità

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \delta_{nm} \frac{2}{2n+1} \quad (1.59)$$

e la formula di Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (1.60)$$

I polinomi di Legendre soddisfano l'equazione

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0 \quad (1.61)$$

e le seguenti relazioni:

$$(n + 1)P_{n+1} - (2n + 1)xP_n + nP_{n-1} = 0 \quad (1.62)$$

$$nP_n + \frac{d}{dx}P_{n-1} - x\frac{d}{dx}P_n = 0 \quad (1.63)$$

Una funzione $f \in L^2[-1, 1]$ può esser decomposta sulla base ortogonale e completa dei polinomi di Legendre,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \quad (1.64)$$

con

$$c_n = \frac{2n + 1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx \quad (1.65)$$

Polinomi di Hermite Altri spazi di interesse sono $L^2(-\infty, \infty)$, $L^2(-\infty, a]$, $L^2[a, \infty)$. Per $L^2(-\infty, \infty)$ scegliamo come funzione peso $s(x) = \exp(-x^2)$. In questo caso la procedura di Gram Schmidt dà la successione

$$e_n(x) = \frac{1}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{1/2}} H_n(x) \quad (1.66)$$

dove gli H_n sono i polinomi di Hermite di ordine n .

Ricordiamo le relazioni di ortogonalità

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) H_n(x) H_m(x) dx = \delta_{nm} 2^n n! \sqrt{\pi} \quad (1.67)$$

e la formula di Rodrigues

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2) \quad (1.68)$$

I polinomi di Hermite soddisfano l'equazione

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \quad (1.69)$$

e le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} H_n(x) &= 2n H_{n-1}(x) \\ H_{n+2}(x) - 2x H_{n+1}(x) + 2(n + 1) H_n(x) &= 0 \end{aligned} \quad (1.70)$$

I polinomi di Hermite sono un sistema ortogonale e completo per lo spazio $L^2(-\infty, \infty)$ rispetto alla misura $\exp(-x^2)dx$.

Polinomi di Laguerre Consideriamo lo spazio $L^2[0, \infty)$. Possiamo ottenere da questo con un cambiamento di variabile sia $L^2(-\infty, a]$ che $L^2[a, \infty)$.

Consideriamo la funzione peso $s(x) = \exp(-x)$. In questo caso la procedura di Gram Schmidt dà la successione

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x, \quad L_2(x) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2 \dots \quad (1.71)$$

ed in generale

$$e_n(x) = L_n(x) \quad (1.72)$$

dove gli L_n sono i polinomi di Laguerre di ordine n . Vale la formula di Rodrigues

$$L_n(x) = \exp(x) \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n \exp(-x)) \quad (1.73)$$

I polinomi di Laguerre sono un sistema ortonormale e completo per lo spazio $L^2[0, \infty)$ rispetto alla misura $\exp(-x)dx$.

Si definiscono anche i polinomi associati di Laguerre

$$L_n^\alpha(x) = \exp(x) x^{-\alpha} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha} \exp(-x)) \quad (1.74)$$

che soddisfano l'equazione differenziale

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0 \quad (1.75)$$

Le relazioni di ortogonalità per i polinomi associati sono

$$\int_0^\infty x^\alpha \exp(-x) L_m^\alpha(x) L_n^\alpha(x) dx = \frac{\Gamma(1 + \alpha + n)}{n!} \delta_{mn} \quad (1.76)$$

I polinomi di Laguerre corrispondono ad $\alpha = 0$.

Nota In Meccanica quantistica si definiscono invece come polinomi associati

$$L_n^p(x) = \frac{d^p}{dx^p} L_n(x) \quad (1.77)$$

per $p = 1, 2, \dots$.

La loro normalizzazione è

$$\int_0^\infty x^{2l+2} \exp(-x) [L_{n+l}^{2l+1}(x)]^2 dx = 2n \frac{[(n+l)!]^3}{(n-l-1)!} \quad (1.78)$$

con n e l interi.

2 Distribuzioni

Una variabile fisica è di solito rappresentata ricorrendo al concetto di funzione. In alcuni casi però il concetto di funzione non è più sufficiente, in quanto la semplificazione porta a considerare, per esempio, cariche puntiformi in elettrodinamica o punti materiali in meccanica. In questi casi è possibile generalizzare il concetto di funzione, sostituendolo con quello di funzionale, ovvero una regola che assegna un numero reale o complesso ad ogni funzione appartenente ad un certo insieme di funzioni test. Questo nuovo concetto permette di descrivere in modo matematico consistente la densità di carica o di materia puntuali. Noi considereremo funzionali di un certo tipo, detti distribuzioni, e a seconda dello spazio di funzioni test distingueremo tra distribuzioni e distribuzioni temperate. Il concetto di distribuzione permetterà la descrizione di oggetti come la delta di Dirac.

Questo strumento permetterà inoltre di definire la trasformata di Fourier di funzioni come 1 o $\sin x$, cioè di funzioni che non sono di classe L^1 o L^2 .

2.1 Spazio \mathcal{D} di funzioni test

Prima di definire le distribuzioni dobbiamo introdurre lo spazio delle funzioni test. Cominciamo col ricordare cosa si intende per funzione a supporto compatto. Supporto di una funzione è la chiusura dell'insieme in cui $f(x) \neq 0$.

Una funzione $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}(\mathbf{C})$, definita su \mathbf{R}^n e nulla al di fuori di una regione chiusa e limitata Ω si dice a *supporto compatto*.

Indichiamo con $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ o con $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ (nel seguito ometteremo \mathbf{R}^n) lo spazio delle funzioni a supporto compatto ed infinitamente derivabili. Naturalmente il supporto Ω non è lo stesso per tutte le funzioni. Queste funzioni saranno le *funzioni test*.

Lo spazio delle funzioni test è uno spazio vettoriale, ovvero se $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$ anche $a\varphi_1 + b\varphi_2 \in \mathcal{D}$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$ e gli assiomi dello spazio vettoriale sono soddisfatti.

Lo spazio di funzioni test non è uno spazio normato ma è possibile introdurre un concetto di convergenza. Consideriamo una successione di funzioni test $\{\varphi_i\}$ con $i \in \mathbf{N}$ in $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Diremo che la successione $\{\varphi_i\}$ è una *successione nulla* se

- i) se tutte le φ_i sono zero al di fuori di una regione limitata (indipendente da i)
- ii) per ogni multiindice α di dimensione n

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |\partial^\alpha \varphi_i(x)| = 0 \quad (2.1)$$

dove

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad (2.2)$$

con $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ multiindice e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ l'*ordine* della derivata.

In altre parole la successione $\{\varphi_i\}$ ed ogni successione di derivate $\{\partial^\alpha \varphi_i\}$ tendono uniformemente a zero.

Esempio. Un esempio di funzione test in $C_0^\infty(\mathbf{R})$ è

$$\varphi = \exp\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right) \quad (2.3)$$

quando $|x| < 1$, e uguale a zero per $|x| \geq 1$.

La successione $\{\frac{1}{i}\varphi(x)\}$ con φ data dalla (2.3) è una successione nulla. La successione $\{\frac{1}{i}\varphi(x/i)\}$ non soddisfa la *i*), in quanto non esiste un intervallo finito al di fuori del quale tutte le funzioni sono zero. La successione $\{\frac{1}{i}\varphi(ix)\}$ non soddisfa la *ii*).

2.2 Distribuzioni in \mathcal{D}

Considereremo in questo paragrafo distribuzioni definite per $\varphi \in \mathcal{D}$. Diamo prima la definizione di funzionale lineare.

Definizione Un *funzionale* lineare è una applicazione lineare da uno spazio vettoriale X in un campo scalare \mathbf{K} .

Se $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ (\mathbf{C}) il funzionale è un funzionale reale (complesso).

Ciò significa che $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, T associa a φ il numero reale (complesso) (T, φ) . Ricordiamo che un funzionale T su \mathcal{D} è *lineare* se

$$(T, a\varphi_1 + b\varphi_2) = a(T, \varphi_1) + b(T, \varphi_2) \quad (2.4)$$

$\forall a, b \in \mathbf{R}(\mathbf{C})$ e $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$.

Per verificare la continuità del funzionale lineare, basta verificarla nell'origine. Quindi un funzionale T su \mathcal{D} è *continuo* se per ogni successione nulla di funzioni test $\{\varphi_i\}$ la successione numerica $\{(T, \varphi_i)\}$ tende a zero. In particolare il *funzionale nullo* O è tale che $(O, \varphi) = 0 \forall \varphi \in \mathcal{D}$.

Definizione Una *distribuzione* è un funzionale lineare e continuo definito sullo spazio \mathcal{D} .

Lo spazio delle distribuzioni sarà denotato con \mathcal{D}' . E' anche chiamato *spazio duale* di \mathcal{D} .

Esempio 1. Le funzioni localmente integrabili, ovvero le funzioni integrabili secondo Lebesgue su ogni regione limitata, permettono di definire delle distribuzioni nel modo seguente: la distribuzione T_f associa a φ il numero dato da

$$(T_f, \varphi) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad (2.5)$$

Proviamo a dimostrarlo. La linearità del funzionale (2.5) è ovvia. Consideriamo poi una successione nulla $\{\varphi_i\}$. Si ha

$$|(T_f, \varphi_i)| = \left| \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\varphi_i(x)dx \right| \leq \sup_{x \in \Omega} |\varphi_i(x)| \int_{\Omega} |f(x)|dx \quad (2.6)$$

dove $\Omega \in \mathbf{R}^n$ è una sferetta tale che al di fuori di essa tutte le φ_i sono nulle. Dalla (2.6) essendo $\{\varphi_i\}$ una successione nulla, segue

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |(T_f, \varphi_i)| = 0 \quad \blacksquare \quad (2.7)$$

Distribuzioni che possono esser generate da funzioni localmente integrabili si dicono *distribuzioni regolari*. Tutte le distribuzioni che non sono regolari si dicono *distribuzioni singolari*.

Due funzioni localmente integrabili tali che

$$f(x) = g(x) \text{ q.o.} \quad (2.8)$$

individuano la stessa distribuzione regolare.

Nel seguito, nel caso di distribuzioni regolari T_f utilizzeremo lo stesso simbolo della funzione $(T_f, \varphi) = (f, \varphi)$.

Esempio 2. Sia c una costante. Consideriamo il funzionale su \mathcal{D} definito da

$$(c, \varphi) = \int_{\mathbf{R}^n} c\varphi(x)dx \quad \varphi \in \mathcal{D} \quad (2.9)$$

La (2.9) definisce una distribuzione regolare.

Esempio 3. Sia Ω un dominio in \mathbf{R}^n . Consideriamo il funzionale

$$(I_\Omega, \varphi) = \int_{\Omega} \varphi(x)dx = \int_{\mathbf{R}^n} I_\Omega(x)\varphi(x)dx \quad (2.10)$$

con I_Ω funzione caratteristica dell'insieme Ω . La (2.10) definisce una distribuzione regolare.

Esempio 4. Definiamo il funzionale lineare δ come il funzionale che associa ad ogni φ il numero

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0) \quad \varphi \in \mathcal{D} \quad (2.11)$$

Il funzionale è lineare e continuo. La linearità è ovvia. Inoltre il funzionale é continuo. Infatti se $\{\varphi_i\}$ è una successione nulla segue (per i sufficientemente grande), $\forall \epsilon > 0$

$$|(\delta, \varphi_i)| = |\varphi_i(0)| \leq \sup |\varphi_i| \leq \epsilon \quad (2.12)$$

La distribuzione è detta *delta di Dirac*.

La delta è una distribuzione singolare. Se la distribuzione δ fosse regolare dovrebbe esistere una funzione f localmente integrabile tale che

$$(\delta, \varphi) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad (2.13)$$

Consideriamo come funzioni test la famiglia di funzioni

$$\psi_a(x) = \exp \frac{a^2}{|x|^2 - a^2} \text{ per } |x| < a \quad \psi_a(x) = 0 \text{ per } |x| \geq a \quad (2.14)$$

con

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \quad (2.15)$$

Si ha

$$\left| \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\psi_a(x)dx \right| = \left| \int_{|x|<a} f(x)\psi_a(x)dx \right| \leq \frac{1}{e} \int_{|x|<a} |f(x)|dx \quad (2.16)$$

dove abbiamo usato $|\psi_a(x)| \leq 1/e$. Se la $f(x)$ fosse localmente integrabile si avrebbe

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{|x|<a} |f(x)|dx = 0 \quad (2.17)$$

e pertanto dalla (2.16)

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\psi_a(x)dx = 0 \quad (2.18)$$

D'altra parte

$$(\delta, \psi_a) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\psi_a(x)dx = \psi_a(0) = \frac{1}{e} \quad (2.19)$$

e quindi anche

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\psi_a(x)dx = \frac{1}{e} \quad (2.20)$$

in contraddizione con la (2.18). Ma ciò è assurdo e quindi la distribuzione δ non è regolare.

2.3 Operazioni sulle distribuzioni

Consideriamo alcune operazioni sulle distribuzioni.

Addizione di distribuzioni. Siano T_1 e T_2 due distribuzioni in \mathcal{D}' . La somma è definita come la distribuzione $T_1 + T_2 \in \mathcal{D}'$ tale che

$$(T_1 + T_2, \varphi) = (T_1, \varphi) + (T_2, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad (2.21)$$

Moltiplicazione di una distribuzione per una costante. Sia α un numero reale (complesso). La moltiplicazione di una distribuzione T per α è la distribuzione αT definita da

$$(\alpha T, \varphi) = (T, \alpha \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad (2.22)$$

Il lato destro definisce un funzionale lineare e continuo su \mathcal{D} .

Lo spazio \mathcal{D}' con le due operazioni di addizione e moltiplicazione è uno spazio vettoriale.

Traslazione di una distribuzione. Sia T una distribuzione in \mathcal{D}' . Definiamo la *distribuzione traslata* come la distribuzione $T(x - a)$ tale che

$$(T(x - a), \varphi(x)) = (T, \varphi(x + a)) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad (2.23)$$

Questa definizione è precisamente quella che ci aspettiamo. Infatti se T_f è la distribuzione regolare associata alla funzione f vale

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x - a) \varphi(x) dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) \varphi(x + a) dx \quad (2.24)$$

Esempio 1.

$$(\delta(x - a), \varphi(x)) = (\delta, \varphi(x + a)) = \varphi(a) \quad (2.25)$$

Cambiamento di scala. Data la distribuzione T vogliamo definire la distribuzione $T(\alpha x)$ dove ricordiamo $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$ con $\alpha \in \mathbf{R}$. Consideriamo prima una distribuzione regolare T_f . Vale

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(\alpha x) \varphi(x) dx = \frac{1}{|\alpha|^n} \int_{\mathbf{R}^n} f(x) \varphi(x/\alpha) dx = (T_f, 1/|\alpha|^n \varphi(x/\alpha)) \quad (2.26)$$

Quindi definiamo la distribuzione $T(\alpha x)$ con

$$(T(\alpha x), \varphi) = (T, 1/|\alpha|^n \varphi(x/\alpha)) \quad (2.27)$$

Se invece $\alpha x = \alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n$ allora è

$$(T(\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n), \varphi) = (T, |\alpha_1 \dots \alpha_n|^{-1} \varphi(x/\alpha)) \quad (2.28)$$

dove $x/\alpha \equiv (x_1/\alpha_1, x_2/\alpha_2, \dots, x_n/\alpha_n)$.

Esempio 2. Se $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ è $\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \delta$. Infatti

$$(\delta(\alpha x), \varphi) = \frac{1}{|\alpha|} (\delta, \varphi(x/\alpha)) = \frac{1}{|\alpha|} \varphi(0) \quad (2.29)$$

Come conseguenza si ha $\delta(-x) = \delta$.

Nel caso di una trasformazione generale con una matrice $n \times n$ è

$$(T(A^{-1}x), \varphi) = |\det A| (T, \varphi(Ax)) \quad (2.30)$$

In questo modo è possibile studiare le proprietà di invarianza delle distribuzioni rispetto a trasformazioni (traslazioni, rotazioni, trasformazioni di Lorentz, etc.)

Moltiplicazione di una distribuzione per una funzione C^∞ . In generale non è possibile definire il prodotto di distribuzioni. In alcuni casi però questo è possibile. Per esempio sia g una distribuzione regolare associata ad una funzione $g \in C^\infty$. Allora è possibile definire il prodotto Tg con $T \in \mathcal{D}'$ con

$$(Tg, \varphi) = (T, g\varphi) \quad \varphi \in \mathcal{D} \quad (2.31)$$

Infatti sotto queste ipotesi anche $g\varphi \in \mathcal{D}$.

Esempio 3. Se $g \in C^\infty$ allora $g(x)\delta(x) = g(0)\delta(x)$.

Derivata di una distribuzione. Una funzione localmente integrabile può non aver derivata in alcuni punti. Una distribuzione è invece sempre derivabile, e la derivata è ancora una distribuzione. Consideriamo prima una distribuzione regolare generata da una funzione di una variabile che è derivabile ovunque e con derivata continua. Vale allora

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -(f, \varphi') \quad (2.32)$$

ovvero la derivata della distribuzione regolare f coincide con la distribuzione regolare definita da f' .

Definiamo quindi, per ogni distribuzione $T \in \mathcal{D}'$, la sua derivata $T' \in \mathcal{D}'$ come quella distribuzione tale che

$$(T', \varphi) = -(T, \varphi') \quad \forall T \in \mathcal{D}' \quad (2.33)$$

La (2.33) definisce un funzionale lineare e continuo. La linearità è ovvia. Inoltre se $\{\varphi_i\}$ è una successione nulla anche $\{\varphi'_i\}$ lo è e quindi $(T, -\varphi'_i) \rightarrow 0$.

L'ovvia generalizzazione ad \mathbb{R}^n per ogni multiindice α è

$$(\partial^\alpha T, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (T, \partial^\alpha \varphi) \quad (2.34)$$

dove $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Essendo $\varphi \in C_0^\infty$ segue che una distribuzione è infinitamente derivabile. Questo permette quindi di estendere il concetto di differenziabilità a funzioni che non sarebbero derivabili nel senso dell'analisi.

Esempio 4. Calcoliamo la derivata della delta di Dirac:

$$(\delta', \varphi) = -(\delta, \varphi') = -\varphi'(0) \quad (2.35)$$

Esempio 5. Derivata della θ . Dalla proprietà di θ segue

$$(\theta, \varphi) = \int_0^\infty \varphi(x)dx \quad (2.36)$$

La (2.36) definisce una distribuzione. La linearità è ovvia. La continuità segue da

$$\left| \int_0^\infty \varphi_i(x)dx \right| \leq \sup_{x \in [-a, +a]} |\varphi_i(x)|a \quad \rightarrow_{i \rightarrow \infty} 0 \quad (2.37)$$

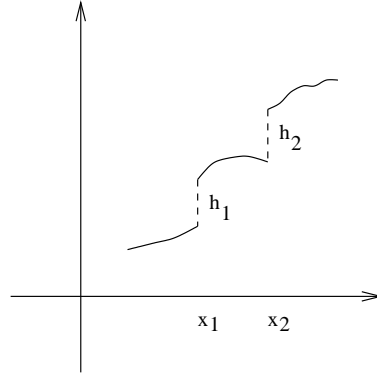


Figura 1: Esempio di una funzione continua a tratti

se la regione al di fuori della quale tutte le φ_i sono nulle è l'intervallo $(-a, +a)$.

Perciò abbiamo

$$(\theta', \varphi) = -(\theta, \varphi') = -\int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) \quad (2.38)$$

Quindi

$$\theta' = \delta \quad (2.39)$$

Analogamente

$$\left(\frac{d}{dx}\theta(-x), \varphi\right) = -(\theta(-x), \varphi') = -\int_{-\infty}^0 \varphi'(x) dx = -\varphi(0) \quad (2.40)$$

dove abbiamo utilizzato

$$(\theta(-x), \psi) = (\theta, \psi(-x)) = \int_0^{\infty} \psi(-x) dx = \int_{-\infty}^0 \psi(x) dx \quad (2.41)$$

In conclusione

$$\frac{d}{dx}\theta(-x) = -\delta \quad (2.42)$$

Esempio 6. Derivata di una funzione continua a tratti. Sia f una funzione continua a tratti, con derivata prima continua a tratti, salvo nei punti x_1, x_2, \dots dove f ha delle discontinuità con salti uguali a h_1, h_2, \dots come in Fig. 1. Se definiamo la funzione

$$f_1(x) = f(x) - \sum_k h_k \theta(x - x_k) \quad (2.43)$$

questa funzione è continua e possiede una derivata uguale a f' salvo in x_1, x_2, \dots

Possiamo costruirci le distribuzioni f e f_1 associate alle funzioni f e f_1 . La derivata della distribuzione regolare f_1 coincide con la distribuzione regolare definita da f'_1 . Risulta inoltre

$$f'_1 = f' - \sum_k h_k \delta(x - x_k) \quad (2.44)$$

Infatti

$$(f'_1, \varphi) = -(f_1, \varphi') = -(f, \varphi') + \left(\sum_k h_k \theta(x-x_k), \varphi' \right) = (f', \varphi) - \left(\sum_k h_k \delta(x-x_k), \varphi \right) \quad (2.45)$$

ovvero

$$f' = f'_1 + \sum_k h_k \delta(x-x_k) \quad (2.46)$$

2.4 Distribuzioni temperate

Abbiamo già incontrato lo spazio lineare delle funzioni rapidamente decrescenti o spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Possiamo introdurre in \mathcal{S} una nozione di convergenza.

Una successione $\{\varphi_i\}$ in \mathcal{S} si dice *successione nulla* se

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |M^\alpha \partial^\beta \varphi_i(x)| = 0 \quad (2.47)$$

per ogni α e β e dove ricordiamo $M^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$.

Lo spazio \mathcal{S} non coincide con \mathcal{D} . Per esempio la funzione $\exp(-|x|^2)$ sta in \mathcal{S} , ma non appartiene a \mathcal{D} . Si può dimostrare che \mathcal{D} è denso in \mathcal{S} , cioè per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$ esiste una successione di funzioni $\{\varphi_i\} \in \mathcal{D}$ tendente a φ .

Possiamo allora dare la seguente

Definizione Una *distribuzione temperata (o a crescita lenta)* è un funzionale lineare e continuo su \mathcal{S} . Indicheremo con \mathcal{S}' lo spazio delle distribuzioni temperate.

Una classe particolare di distribuzioni temperate sono quelle generate da funzioni di crescita lenta.

Se f è una *funzione a crescita lenta*, cioè se per qualche $m \geq 0$

$$\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)| (1 + |x|^2)^{-m} dx < \infty \quad (2.48)$$

con $|x|$ dato dalla (2.15), allora essa determina una distribuzione temperata definita da

$$(f, \varphi) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{S} \quad (2.49)$$

In modo equivalente una funzione è a crescita lenta se è localmente integrabile e esistono $c, n \in \mathbf{R}$ con $c, n > 0$, tali che

$$|f(x)| \leq c|x|^n \quad \text{per } x \rightarrow \infty \quad (2.50)$$

Abbiamo visto che $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$; quindi le distribuzioni temperate essendo definite su \mathcal{S} sono anche definite su \mathcal{D} , pertanto $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$. Mostriamo un esempio di distribuzione in \mathcal{D}' che non appartiene a \mathcal{S}' . La serie di distribuzioni

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} \exp(i^2) \delta(x - i) \quad (2.51)$$

definisce una distribuzione in \mathcal{D}' . Infatti $\forall \varphi \in \mathcal{D}$

$$(g, \varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} \exp(i^2) \varphi(i) < \infty \quad (2.52)$$

dato che le φ sono a supporto compatto. Se invece prendiamo $\varphi \in \mathcal{S}$ ci sono delle funzioni per cui la (2.52) non converge. Basta prendere $\varphi(x) = \exp(-x^2)$.

Si dimostra che \mathcal{S}' è denso in \mathcal{D}' . Poichè \mathcal{S}' è un sottoinsieme di \mathcal{D}' segue che le operazioni definite in \mathcal{D}' valgono anche in \mathcal{S}' salvo la seguente precisazione.

Notiamo che se f è una distribuzione temperata e a una funzione se vogliamo che il prodotto af sia ancora una distribuzione temperata occorre che la funzione sia di lenta crescita.

Definiamo anche il supporto di una distribuzione.

L'unione degli aperti Ω per cui $(T, \varphi) = 0 \forall \varphi \in \mathcal{D}$ con supporto contenuto in Ω è detto *insieme nullo*. Il complementare dell'insieme nullo è il *supporto*, e quindi essendo il complemento di un aperto esso sarà chiuso.

Vale il seguente risultato. Se $T \in \mathcal{D}'$ ha supporto limitato allora T appartiene anche a \mathcal{S}' .

Esempio 1. Il supporto della distribuzione δ è l'insieme costituito dal punto $x = 0$. Infatti se consideriamo $\varphi \in \mathcal{D}$ con supporto su intervalli non contenenti il punto $x = 0$, è

$$(\delta, \varphi) = 0 \quad (2.53)$$

Esempio 2. Indichiamo con $Pv \frac{1}{x}$ la distribuzione temperata su \mathbf{R} definita da

$$(Pv \frac{1}{x}, \varphi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right] \quad \varphi \in \mathcal{S} \quad (2.54)$$

Questo limite dell'integrale si chiama *valore principale di Cauchy*. Ora

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \quad (2.55)$$

esiste. Infatti si ha

$$\begin{aligned} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx &= \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \\ &= \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{x} dx \end{aligned} \quad (2.56)$$

Quindi l'integral esiste quando $\epsilon \rightarrow 0$ in quanto

$$\frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{x} \rightarrow 2\varphi'(0) \quad (2.57)$$

quando $x \rightarrow 0$, e definisce un funzionale lineare. Si può dimostrare che (2.56) è anche continuo.

Proviamo ora a calcolare la derivata della distribuzione temperata $\ln|x| = \theta(x)\ln x + \theta(-x)\ln(-x)$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} \ln|x|, \varphi\right) &= -\left(\ln|x|, \frac{d}{dx}\varphi(x)\right) \\ &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{\epsilon}^{\infty} \ln x \frac{d}{dx}\varphi(x) dx + \int_{-\infty}^{-\epsilon} \ln(-x) \frac{d}{dx}\varphi(x) dx \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{\epsilon}^{\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx + \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{1}{x} \varphi(x) dx \right] + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (\varphi(\epsilon) - \varphi(-\epsilon)) \ln \epsilon \\ &= \left(Pv \frac{1}{x}, \varphi\right) + 2\varphi'(0) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon \log \epsilon \\ &= \left(Pv \frac{1}{x}, \varphi\right) \end{aligned} \quad (2.58)$$

Pertanto

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = Pv \frac{1}{x} \quad (2.59)$$

2.5 Successioni di distribuzioni

Sia $\{T_y\}$ una *famiglia* di distribuzioni in \mathcal{D}' (o analogamente in \mathcal{S}') dipendente da un parametro continuo y . Diremo che la famiglia T_y converge alla distribuzione T quando $y \rightarrow y_0$ e scriveremo

$$\lim_{y \rightarrow y_0} T_y = T \quad (2.60)$$

se

$$\lim_{y \rightarrow y_0} (T_y, \varphi) = (T, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad (2.61)$$

Valgono i seguenti teoremi.

Teorema. Sia $\{T_y\}$ una famiglia di distribuzioni in \mathcal{D}' . Se

$$\lim_{y \rightarrow y_0} (T_y, \varphi) \quad (2.62)$$

esiste $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, allora il funzionale su \mathcal{D} definito da

$$(T, \varphi) = \lim_{y \rightarrow y_0} (T_y, \varphi) \quad (2.63)$$

é una distribuzione su \mathcal{D} .

Dimostrazione. Si verifica facilmente che il funzionale definito da (2.63) é lineare e continuo.

Teorema. Sia $\{T_y\}$ una famiglia di distribuzioni in \mathcal{D}' convergente a T per $y \rightarrow y_0$. Si ha allora, per ogni multiindice α , $\partial^\alpha T_y \rightarrow \partial^\alpha T$ per $y \rightarrow y_0$.

Dimostrazione. Verifichiamolo nel caso $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$:

$$(T'_y, \varphi) = -(T_y, \varphi') \xrightarrow{y \rightarrow y_0} -(T, \varphi') = (T', \varphi) \quad (2.64)$$

Quanto detto per le famiglie è valido anche per successioni di distribuzioni, quando y è intero positivo e $y_0 = \infty$.

Teorema. Sia $\{f_\alpha\}$ una famiglia di funzioni localmente integrabili e su ogni sfera chiusa in \mathbf{R}^n supponiamo che f_α converga uniformemente a f per $\alpha \rightarrow \alpha_0$, ovvero $\sup |f_\alpha(x) - f(x)| \rightarrow 0$. Allora f_α tende a f nel senso delle distribuzioni.

Dimostrazione. Poichè f_α converge uniformemente è possibile passare a limite sotto il segno di integrale.

In modo analogo diremo che una *serie* di distribuzioni converge se converge la successione delle somme parziali delle distribuzioni.

Differenziazione rispetto ad un parametro. Sia T_y una distribuzione dipendente da un parametro continuo y . Con y fisso $[T_{y+h} - T_y]/h$ è una distribuzione dipendente dal parametro h . Definiamo derivata della distribuzione T_y rispetto al parametro y la distribuzione dT_y/dy , definita dalla seguente equazione, quando il limite sottoindicato esiste

$$\left(\frac{dT_y}{dy}, \varphi\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [(T_{y+h}, \varphi) - (T_y, \varphi)] \quad (2.65)$$

Esempio 1. Consideriamo la derivata rispetto a y della distribuzione $T(x - y)$ in $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$. E':

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dy}T(x - y), \varphi(x)\right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (T(x - y - h) - T(x - y), \varphi(x)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (T, \varphi(x + y + h) - \varphi(x + y)) \\ &= (T, \varphi'(x + y)) \\ &= -(T', \varphi(x + y)) = -(T'(x - y), \varphi(x)) \end{aligned} \quad (2.66)$$

Pertanto

$$\frac{d}{dy}T(x - y) = -T'(x - y) \quad (2.67)$$

cioè la derivata della distribuzione traslata rispetto al parametro della traslazione è uguale all'opposto della distribuzione derivata, traslata.

In particolare

$$\frac{d}{dy}\delta(x - y) = -\delta'(x - y) \quad \blacksquare \quad (2.68)$$

Sia $\{f_\alpha\}$ una famiglia di funzioni localmente integrabili su \mathbf{R}^n con la proprietá

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_{\mathbf{R}^n} f_\alpha(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad (2.69)$$

Chiameremo $\{f_\alpha\}$ una δ -famiglia n -dimensionale. Se l'indice α assume tutti i valori interi, parleremo di δ -successione.

Teorema. Sia $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione non negativa localmente integrabile su \mathbf{R}^n per cui

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx = 1 \quad (2.70)$$

Per $\alpha > 0$ definiamo

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha^n} f(x/\alpha) \quad (2.71)$$

Allora $\{f_\alpha\}$ è una δ -famiglia per $\alpha \rightarrow 0$.

Dimostrazione. Il cambiamento di variabile permette di ottenere

$$\begin{aligned} i) \quad & \int_{\mathbf{R}^n} f_\alpha(x) dx = 1 \\ ii) \quad & \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{|x| > A} f_\alpha(x) dx = 0 \quad \forall A > 0 \\ iii) \quad & \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{|x| < A} f_\alpha(x) dx = 1 \quad \forall A > 0 \end{aligned} \quad (2.72)$$

Dobbiamo mostrare che per ciascuna funzione test φ , $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}^n} f_\alpha(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$ ovvero utilizzando la *i*)

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}^n} f_\alpha(x) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}^n} f_\alpha(x) \eta(x) dx = 0 \quad (2.73)$$

dove $\eta(x) = \varphi(x) - \varphi(0)$. Dividiamo la regione di integrazione \mathbf{R}^n in due parti $|x| \leq B$ e $|x| > B$. Allora

$$\left| \int_{\mathbf{R}^n} f_\alpha(x) \eta(x) dx \right| \leq \left| \int_{|x| \leq B} f_\alpha(x) \eta(x) dx \right| + \left| \int_{|x| > B} f_\alpha(x) \eta(x) dx \right| \quad (2.74)$$

Ma la funzione test φ è limitata e cosí la η per cui $|\eta| \leq M \quad \forall x$

$$\left| \int_{\mathbf{R}^n} f_\alpha(x) \eta(x) dx \right| \leq \sup_{|x| \leq B} |\eta| \int_{|x| \leq B} f_\alpha(x) dx + M \int_{|x| > B} f_\alpha(x) dx \quad (2.75)$$

Poiché η é continua e $\eta(0) = 0$, sará anche $\lim_{B \rightarrow 0} \sup_{|x| \leq B} |\eta| = 0$. Quindi $\forall \epsilon > 0$, possiamo scegliere B tale che $\sup_{|x| \leq B} |\eta| \int_{|x| \leq B} f_\alpha(x) dx < \epsilon/2$ e utilizzare la *ii*) per scegliere un γ tale che

$$\int_{|x| > B} f_\alpha(x) dx < \frac{\epsilon}{2M} \quad \text{for } 0 < \alpha < \gamma \quad \blacksquare \quad (2.76)$$

Esempio 2. Diamo degli esempi di δ -famiglie

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}(x) & f_\nu(x) &= \frac{\nu}{2}\chi_{[-1,1]}(\nu x) \quad \nu \rightarrow \infty \\
f(x) &= \frac{1}{\pi(1+x^2)} & f_\alpha(x) &= \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2+x^2)} \quad \alpha \rightarrow 0^+ \\
f(x) &= \frac{e^{-x^2/4}}{\sqrt{4\pi}} & f_t(x) &= \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}} \quad t \rightarrow 0^+ \\
f(x) &= \theta(x) \frac{e^{-1/4x}}{\sqrt{4\pi x^{3/2}}} & f_t(x) &= t \frac{e^{-t^2/4x}}{\sqrt{4\pi x^{3/2}}} \quad t \rightarrow 0^+ \\
f(x) &= \frac{\sin^2 x}{\pi x^2} & f_\nu(x) &= \frac{\sin^2 \nu x}{\pi \nu x^2} \quad \nu \rightarrow \infty \\
f(x) &= \frac{\sin x}{\pi x} & f_\nu(x) &= \frac{\sin \nu x}{\pi x} \quad \nu \rightarrow \infty
\end{aligned} \tag{2.77}$$

dove $\chi_{[-1,1]}(x)$ è la funzione caratteristica dell'intervallo $[-1, 1]$.

Esempio 3. Consideriamo la distribuzione temperata $\log(x + iy)$ ottenuta dalla funzione di lenta crescita $x \rightarrow \log(x + iy)$. Nel senso delle distribuzioni vale

$$\frac{d}{dx} \log(x + iy) = \frac{1}{x + iy} \tag{2.78}$$

Infatti basta considerare la distribuzione di lenta crescita $\log(x + iy)$, applicare la definizione di derivata, ed integrare per parti.

Quindi

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{x + iy} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{d}{dx} \log(x + iy) \tag{2.79}$$

D'altra parte per la funzione $\log(x + iy)$ vale

$$\begin{aligned}
\lim_{y \rightarrow 0^+} \log(x + iy) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} [\log|x + iy| + i \operatorname{Arg}(x + iy)] \\
&= \log|x| + i\pi\theta(-x)
\end{aligned} \tag{2.80}$$

Questa sarà vera anche per le distribuzioni. Infatti, passando a limite sotto il segno di integrale, si ha

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \int \log(x + iy) \varphi(x) dx = \int [\log|x| + i\pi\theta(-x)] \varphi(x) dx \tag{2.81}$$

Pertanto, utilizzando la (2.64),

$$\frac{1}{x + i0} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{x + iy} = \frac{d}{dx} [\log|x| + i\pi\theta(-x)] = P_v \frac{1}{x} - i\pi\delta \tag{2.82}$$

Analogamente

$$\frac{1}{x - i0} = P_v \frac{1}{x} + i\pi\delta \tag{2.83}$$

Esempio 4. Consideriamo la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx \quad (2.84)$$

Questa converge uniformemente a zero. La successione delle derivate $\cos nx$ non converge in senso classico. Ma se consideriamo la successione di distribuzioni, la successione f'_n converge a zero. Infatti

$$(f'_n, \varphi) = -\frac{1}{n} \int_{-a}^{+a} \sin nx \varphi'(x) dx \rightarrow 0 \quad (2.85)$$

se $[-a, a]$ è il supporto della funzione φ .

La distribuzione $\delta(a(x))$. Sia $a \in C^1(\mathbb{R})$. Definiamo la distribuzione $\delta(a(x))$ con

$$\delta(a(x)) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} f_\alpha(a(x)) \quad (2.86)$$

dove $\{f_\alpha\}$ è una δ -famiglia.

Supponiamo che la $a(x)$ ammetta zeri semplici nei punti $x_k, k = 1, 2, \dots, n$. Vale

$$\delta(a(x)) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{|a'(x_k)|} \delta(x - x_k) \quad (2.87)$$

Basta dimostrare il teorema localmente nell'intorno dello zero x_k . Sia $\varphi \in \mathcal{D}([x_k - \epsilon_k, x_k + \epsilon_k])$, ovvero abbia supporto in $[x_k - \epsilon_k, x_k + \epsilon_k]$.

Se $\varphi \in \mathcal{D}([x_k - \epsilon_k, x_k + \epsilon_k])$

$$\begin{aligned} (\delta(a(x)), \varphi) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{x_k - \epsilon_k}^{x_k + \epsilon_k} f_\alpha(a(x)) \varphi(x) dx \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{a(x_k - \epsilon_k)}^{a(x_k + \epsilon_k)} f_\alpha(y) \varphi(a^{-1}(y)) \frac{1}{|a'[a^{-1}(y)]|} dy \\ &= (\delta, \varphi(a^{-1}(y)) \frac{1}{|a'[a^{-1}(y)]|}) \\ &= \frac{1}{|a'(x_k)|} \varphi(x_k) \\ &= (\frac{1}{|a'(x_k)|} \delta(x - x_k), \varphi) \end{aligned}$$

Se invece $\varphi \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$ e l'intervallo (α, β) non contiene nessun zero x_k allora

$$(\delta(a(x)), \varphi) = 0 \quad (2.88)$$

Sommando i vari contributi si ottiene il risultato finale.

Esempi

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} [\delta(x - a) + (\delta(x + a))] \quad a > 0 \quad (2.89)$$

$$\delta(\sin x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - k\pi) \quad (2.90)$$

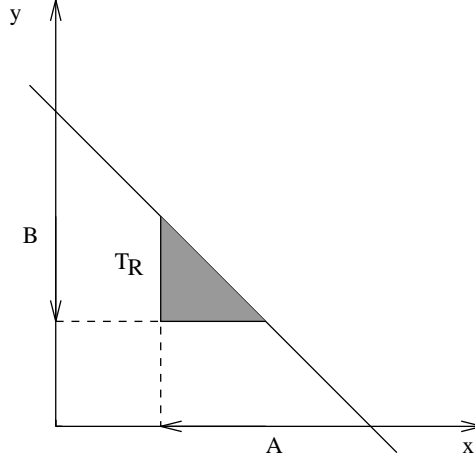


Figura 2: Un esempio di regione T_R limitata

2.6 Prodotto diretto di distribuzioni e prodotto di convoluzione

Prodotto diretto. Questa operazione combina una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ con una $S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^m)$. Consideriamo una funzione $\varphi(x, y) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m)$. Per ogni $x \in \mathbf{R}^n$, $\varphi(x, y) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^m)$. Si può dimostrare che $(S, \varphi(x, y)) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Questo permette di considerare il funzionale

$$(T \times S, \varphi(x, y)) = (T, (S, \varphi(x, y))) \quad (2.91)$$

Si verifica che questo definisce una distribuzione in $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m)$ che è detta *prodotto diretto* o anche *tensoriale*. Si dimostra che il prodotto diretto è commutativo ed associativo.

Una analoga definizione vale in \mathcal{S}' .

Esempio 1. Un esempio di prodotto diretto o tensoriale è la δ in \mathbf{R}^3 $\delta(\vec{x}) \equiv \delta^3(x) = \delta(x) \times \delta(y) \times \delta(z)$. Infatti

$$(\delta(\vec{x}), \varphi(x, y, z)) = \varphi(0, 0, 0) \quad (2.92)$$

Prodotto di convoluzione. Siano f e g due funzioni localmente integrabili su \mathbf{R}^n . Se $\forall x$ esiste l'integrale

$$f * g(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(y)g(x - y)dy \quad (2.93)$$

questo definisce il prodotto di convoluzione delle due funzioni.

Se $\text{supp } f \subset A$ e $\text{supp } g \subset B$ ed inoltre gli insiemi sono tali che $\forall R > 0$ l'insieme

$$T_R = [(x, y) : x \in A, y \in B, |x + y| \leq R] \quad (2.94)$$

sia limitato in \mathbf{R}^{2n} (vedi Fig. 2), il prodotto di convoluzione $f * g$ è localmente integrabile.

Infatti utilizzando il teorema di Fubini si ha

$$\begin{aligned} \left| \int_{|z|<R} f * g dz \right| &\leq \int_{|z|<R} \int |f(y)||g(z-y)| dy dz \\ &\leq \int_{T_R} |f(y)||g(x)| dy dx \end{aligned} \quad (2.95)$$

dove abbiamo fatto il cambiamento di variabile $x = z - y$. Possiamo allora considerare la distribuzione $f * g$ definita da

$$(f * g, \varphi) = \int f(y)g(z-y)dy\varphi(z)dz \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \quad (2.96)$$

Facendo il cambiamento di variabili a jacobiano uno $z \rightarrow x+y$, $y \rightarrow x$ possiamo riscrivere la (2.96) nella forma

$$(f * g, \varphi) = \int f(x)g(y)\varphi(x+y)dx dy \quad (2.97)$$

ovvero

$$(f * g, \varphi) = (f(x), (g(y), \varphi(x+y))) \quad (2.98)$$

Assumeremo la (2.98) come definizione di *prodotto di convoluzione* di due distribuzioni. Ora però anche se $\varphi(x)$ è a supporto compatto in $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ non è detto che $\varphi(x+y)$ sia a supporto compatto in $\mathcal{D}(\mathbf{R}^{2n})$. Quindi la convoluzione così definita non esiste sempre. Il prodotto esiste se una delle due distribuzioni è a supporto compatto.

Diamo il seguente criterio:

Teorema. Siano T_1 e T_2 due distribuzioni su $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Allora $T_1 * T_2$ esiste se vale una delle seguenti condizioni:

- i) T_1 o T_2 hanno supporto limitato
- ii) T_1 e T_2 hanno supporto limitato a sinistra (valido per $n = 1$)
- iii) T_1 e T_2 hanno supporto limitato a destra (valido per $n = 1$)

■

Il prodotto di convoluzione, quando esiste, è commutativo ed associativo. Il prodotto di convoluzione ha una unità (la δ):

$$(T * \delta, \varphi) = (T(x), (\delta(y), \varphi(x+y))) = (T(x), \varphi(x)) = (T, \varphi) \quad (2.99)$$

Quindi $T * \delta = T$. In modo analogo si dimostra

$$T(x-a) = T * \delta(x-a) \quad (2.100)$$

e

$$T * \delta' = T' \quad (2.101)$$

Quindi la derivata di una distribuzione è equivalente alla convoluzione della distribuzione con la derivata della δ di Dirac.

Vale inoltre, se $T_1 * T_2$ esiste,

$$(T_1 * T_2)' = T_1 * T_2' = T_1' * T_2 \quad (2.102)$$

Infatti

$$(T_1 * T_2)' = \delta' * (T_1 * T_2) = (\delta' * T_1) * T_2 = T_1' * T_2 \quad (2.103)$$

Utilizzando le proprietà commutativa ed associativa si dimostra l'altra.

Questa proprietà si generalizza al caso \mathbf{R}^n

$$\partial^\alpha(T_1 * T_2) = (\partial^\alpha T_1) * T_2 = T_1 * (\partial^\alpha T_2) \quad (2.104)$$

dove α è un multiindice.

Nota. Per distribuzioni temperate il prodotto di convoluzione $S * T$ è sempre definito se una delle due è a supporto compatto.

3 Trasformata di Fourier di distribuzioni temperate

Sia T una distribuzione temperata. Definiamo la sua trasformata di Fourier come la distribuzione FT tale che

$$(FT, \varphi) = (T, F\varphi) \text{ con } \varphi \in \mathcal{S} \quad (3.1)$$

La (3.1) è ben posta in quanto abbiamo visto che se $\varphi \in \mathcal{S}$ $F\varphi \in \mathcal{S}$. La (3.1) definisce quindi un funzionale lineare e continuo, $FT : \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{C}$. La linearità è ovvia e la continuità segue dalla continuità della trasformata di Fourier. Infatti se $\{\varphi_i\}$ è una successione nulla $\{F\varphi_i\}$ è ancora una successione nulla, e quindi

$$(FT, \varphi_i) = (T, F\varphi_i) \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

In modo analogo si definisce la trasformata inversa:

$$(F^{-1}T, \varphi) = (T, F^{-1}\varphi) \text{ con } \varphi \in \mathcal{S} \quad (3.3)$$

Valgono inoltre le stesse proprietà della trasformata di Fourier di una funzione.

$$\begin{aligned} F[\partial^\alpha T] &= (i)^{|\alpha|} x^\alpha FT \\ F[(-i)^{|\alpha|} x^\alpha T] &= \partial^\alpha FT \\ F[e^{iax} T] &= [FT](x - a) \\ F[T(x - a)] &= e^{-iax} FT \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ricordiamo che α è un multiindice e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

Dimostriamo per esempio la prima delle (3.4) (per semplicità in \mathbf{R}^1 , $T^{(k)}$ denota $\partial^k T / \partial x^k$):

$$\begin{aligned}
(F [T^{(k)}], \varphi) &= (T^{(k)}, F\varphi) = (-1)^k (T, (F\varphi)^{(k)}) \\
&= (-1)^k (T, F [(-ix)^k \varphi]) \\
&= (FT, (ix)^k \varphi) \\
&= ((ix)^k FT, \varphi)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

In modo analogo si dimostrano le altre relazioni.

Esempio 1. Calcoliamo la trasformata di Fourier della δ :

$$(F\delta, \varphi) = (\delta, F\varphi) = F\varphi(0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \varphi(x) dx = \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}, \varphi \right) \tag{3.6}$$

e quindi

$$F\delta = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \tag{3.7}$$

Esempio 2. Calcoliamo la trasformata di Fourier della distribuzione regolare associata alla funzione costante $1 \in \mathcal{S}'$. E'

$$(F1, \varphi) = (1, F\varphi) = \int F\varphi dx = (2\pi)^{n/2} \varphi(0) = ((2\pi)^{n/2} \delta, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

da cui si ottiene

$$F1 = (2\pi)^{n/2} \delta \tag{3.8}$$

Osserviamo che la funzione costante 1 non è trasformabile secondo Fourier mentre lo è la distribuzione temperata ad essa associata.

Esempio 3. Calcoliamo la trasformata di Fourier della distribuzione di Heaviside θ (in \mathbf{R}). Per il teorema del passaggio al limite sotto il segno di integrale, è

$$\int_0^{+\infty} \varphi(y) dy = \lim_{p \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-py} \varphi(y) dy$$

Si ha allora

$$\begin{aligned}
(F\theta, \varphi) &= (\theta, F\varphi) = \int_0^{+\infty} (F\varphi)(y) dy \\
&= \lim_{p \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-py} (F\varphi)(y) dy \\
&= \lim_{p \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-py} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ixy} dx dy \\
&= \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \int_0^{+\infty} e^{-(p+ix)y} dy dx \\
&= \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \frac{1}{p+ix} dx \\
&= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \lim_{p \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x-ip} \varphi(x) dx = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{x-i0}, \varphi \right)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

dove abbiamo utilizzato il teorema di Fubini.

Abbiamo quindi, facendo uso della (2.83)

$$F\theta = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x-i0} = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} P.v \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \delta. \quad (3.10)$$

Esempio 4. Facendo uso delle proprietà elencate in (3.4) si dimostra:

$$\begin{aligned} F \sin ax &= i\sqrt{\frac{\pi}{2}} [\delta(x+a) - \delta(x-a)] \\ F(\theta \sin ax) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{x+a-i0} - \frac{1}{x-a-i0} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{-a}{(x-i0)^2 - a^2} \end{aligned}$$

Esempio 5. Calcoliamo la trasformata di Fourier della distribuzione temperata in \mathbf{R}^3 $\delta(r-a)$, dove $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, a reale positivo, definita da

$$(\delta(r-a), \varphi) = \int_{S_a} \varphi dS_a$$

Tale distribuzione ha per supporto la superficie S_a della sfera con centro nell'origine e di raggio a . Si ha allora:

$$\begin{aligned} (F\delta(r-a), \varphi) &= (\delta(r-a), F\varphi) = \int_{S_a} F\varphi dS_a \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int_{S_a} \int_{\mathbf{R}^3} \varphi(y) e^{-ix \cdot y} dy dS_a \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbf{R}^3} \varphi(y) \int_{S_a} e^{-ix \cdot y} dS_a dy \end{aligned} \quad (3.11)$$

Posto $|y| = \rho$, $x \cdot y = a\rho \cos \theta$, $dS_a = a^2 \sin \theta d\theta d\alpha$, si ottiene

$$\begin{aligned} (F\delta(r-a), \varphi) &= \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}^3} \varphi(y) \int_{-1}^1 e^{ia\rho u} du dy \\ &= \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}^3} \varphi(y) 2 \frac{\sin a\rho}{a\rho} dy = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} a \frac{\sin a\rho}{\rho}, \varphi \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

dove abbiamo posto $u = -\cos \theta$ nell'integrale su θ . Quindi è

$$F\delta(r-a) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} a \frac{\sin a\rho}{\rho} \quad (3.13)$$

4 Soluzioni fondamentali

Studieremo equazioni differenziali parziali lineari a coefficienti costanti, del tipo

$$P(\partial)u = v \quad (4.1)$$

dove $P(\partial)$ è un operatore differenziale di ordine m

$$P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha \quad (4.2)$$

con ∂^α l'operatore differenziale definito in (2.2). I coefficienti a_α sono costanti e u e v sono funzioni in \mathbf{R}^n o distribuzioni.

Una distribuzione E è detta *soluzione fondamentale* se soddisfa

$$P(\partial)E = \delta \quad (4.3)$$

Un risultato dovuto a Malgrange (1953) e Ehrenpreis (1954) [4, 5] assicura che una tale soluzione sempre esiste in \mathcal{D}' . Hörmander (1958) ha poi dimostrato che una soluzione fondamentale esiste in \mathcal{S}' [6]. Questo risultato ci permetterà di studiare l'equazione (4.3) considerandone la trasformata di Fourier. Per esempio in \mathbf{R}^1 , prendendo la trasformata di Fourier otteniamo, utilizzando la (3.4):

$$FP(\partial)E = \sum_{\alpha \leq m} a_\alpha (ix)^\alpha FE = P(ix)FE = (2\pi)^{-1/2} \quad (4.4)$$

e quindi l'equazione differenziale diventa una equazione algebrica in FE .

Supponiamo di aver trovato una E che soddisfa la (4.3), sia $v \in \mathcal{D}$, allora

$$u = E * v \quad (4.5)$$

è soluzione della (4.1). Infatti

$$P(\partial)(E * v) = P(\partial)E * v = \delta * v = v \quad (4.6)$$

Il teorema garantisce solo l'esistenza della soluzione, ma non l'unicità. Ovviamente possiamo aggiungere alla soluzione trovata una qualsiasi soluzione dell'equazione omogenea

$$P(\partial)u = 0 \quad (4.7)$$

Se la soluzione fondamentale è stata trovata facendo uso della trasformata di Fourier, essa sarà una distribuzione in \mathcal{S}' .

Soluzione fondamentale per il Laplaciano in \mathbf{R}^3

Applicando la trasformata F ad ambo i membri dell'equazione $\Delta E = \delta$ si ottiene

$$-|x|^2 FE = (2\pi)^{-3/2},$$

in cui $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Si osservi che $|x|^{-2}$ è localmente integrabile in \mathbb{R}^3 (lo si vede subito usando coordinate polari) ed è perciò una distribuzione regolare. Si ha quindi che una soluzione dell'equazione sopra è data da

$$FE = -(2\pi)^{-3/2}|x|^{-2}.$$

Usando F^{-1} si ottiene

$$(E, \varphi) = (F^{-1}FE, \varphi) = (FE, F^{-1}\varphi) \quad (4.8)$$

$$= -(2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|^2} (F^{-1}\varphi)(x) dx \quad (4.9)$$

$$= -(2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|^2} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(y) e^{iy \cdot x} dy dx \quad (4.10)$$

$$= -(2\pi)^{-3} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{V_R} \frac{1}{|x|^2} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(y) e^{iy \cdot x} dy dx, \quad (4.11)$$

in cui V_R è la sfera di raggio R . Applicando il teorema di Fubini, passando a coordinate polari, posto $r = |y|$, $\rho = |x|$, si ottiene

$$(E, \varphi) = -(2\pi)^{-3} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(y) \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{ir\rho \cos\theta} \sin\theta d\alpha d\theta d\rho dy \quad (4.12)$$

$$= -(2\pi)^{-2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(y) \int_0^R \frac{e^{ir\rho} - e^{-ir\rho}}{ir\rho} d\rho dy \quad (4.13)$$

$$= -(2\pi)^{-2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(y) \int_0^R \frac{2 \sin r\rho}{r} d(r\rho) dy. \quad (4.14)$$

Tenendo conto che $\int_0^{+\infty} (\sin u)/u du = \pi/2$, si ottiene

$$(E, \varphi) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(y)}{r} dy = \left(-\frac{1}{4\pi r}, \varphi\right),$$

da cui

$$E = -\frac{1}{4\pi r}. \quad (4.15)$$

Osserviamo che la soluzione non è continua nell'origine.

Quindi per trovare una soluzione all'equazione

$$\Delta\phi = \rho \quad (4.16)$$

dove ρ è la densità di carica, basta calcolare

$$E * \rho(x) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|x-x'|} \rho(x') dx' \quad (4.17)$$

Nota. In 2 dimensioni $1/|x|^2$ con $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2$ non è più integrabile. Occorre considerare la distribuzione $Pv(1/|x|^2)$ definita da

$$(Pv \frac{1}{|x|^2}, \varphi) = \int_{|x|<1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|^2} dx + \int_{|x|\geq 1} \frac{\varphi(x)}{|x|^2} dx \quad (4.18)$$

In questo caso la soluzione fondamentale risulta

$$E = F^{-1}\left[Pv\frac{1}{|x|^2}\right] = -2\pi \log r + cost \quad (4.19)$$

con $r = |y|$. Per la dimostrazione completa vedi [6].

Soluzione fondamentale per il d'Alembertiano

Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e consideriamo l'equazione

$$(x - a)T = 1.$$

La soluzione più generale è

$$T = Pv\frac{1}{x - a} + A\delta(x - a) \quad (4.20)$$

dato che $(x - a)\delta(x - a) = 0$.

Quindi per esempio

$$T = Pv\frac{1}{x - a}, \quad T = \frac{1}{x - a + i0}, \quad T = \frac{1}{x - a - i0}$$

sono soluzioni di tale equazione. In effetti tali soluzioni differiscono fra loro per un multiplo della distribuzione $\delta(x - a)$. Analogo discorso vale per l'equazione

$$(x - a)(x - b)T = 1, \quad (4.21)$$

per la quale le distribuzioni

$$\begin{aligned} T_{\pm} &= \frac{1}{b - a} \left[\frac{1}{x - b \pm i0} - \frac{1}{x - a \pm i0} \right] \\ &= \frac{1}{(x - a \pm i0)(x - b \pm i0)} \end{aligned} \quad (4.22)$$

sono soluzioni della (4.21).

Possiamo ora trovare una soluzione fondamentale per il d'Alembertiano (lavoriamo in unità in cui la velocità della luce $c = 1$)

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

in 3 dimensioni spaziali, cioè con Δ Laplaciano in \mathbb{R}^3 . Applicando la trasformata F ad ambo i membri dell'equazione $\square E = \delta$ si ottiene

$$-(y_0^2 - |\mathbf{y}|^2)FE = (2\pi)^{-2},$$

in cui $|\mathbf{y}|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. Quindi, per (4.22), con $a = |\mathbf{y}|$ e $b = -|\mathbf{y}|$, una soluzione è

$$FE = \frac{-(2\pi)^{-2}}{(y_0 - i0)^2 - |\mathbf{y}|^2}. \quad (4.23)$$

La soluzione fondamentale del d'Alembertiano che si ottiene da tale FE è detta **funzione di Green causale** o **ritardata** per la ragione che vedremo più avanti ed è indicata con E_{rit} .

Usando F^{-1} si ottiene

$$(E, \varphi) = \left(\frac{-(2\pi)^{-2}}{(y_0 - i0)^2 - |\mathbf{y}|^2}, F^{-1}\varphi \right) \quad (4.24)$$

$$= \int_{\mathbf{R}^4} \frac{-(2\pi)^{-4}}{(y_0 - i0)^2 - |\mathbf{y}|^2} \int_{\mathbf{R}^4} \varphi(x) e^{ix \cdot y} d^4x d^4y \quad (4.25)$$

$$= \left(\int_{\mathbf{R}^4} \frac{-(2\pi)^{-4} e^{ix \cdot y}}{(y_0 - i0)^2 - |\mathbf{y}|^2} d^4y, \varphi \right). \quad (4.26)$$

Da ciò segue che

$$\begin{aligned} E_{rit} &= -(2\pi)^{-4} \int_{\mathbf{R}^4} \frac{e^{ix \cdot y}}{(y_0 - i0)^2 - |\mathbf{y}|^2} d^4y \\ &= -(2\pi)^{-4} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}^4} \frac{e^{ix \cdot y}}{(y_0 - i\epsilon)^2 - |\mathbf{y}|^2} d^4y \end{aligned} \quad (4.27)$$

è la funzione di Green ritardata. Integriamo la (4.27) su y_0 applicando il lemma di Jordan. La funzione integranda ha poli del primo ordine in $\pm|\mathbf{y}| + i\epsilon$. Per $t < 0$ l'integrale va chiuso al di sotto affinché l'arco di circonferenza all'infinito che si aggiunge non dia contributo e quindi si ottiene 0, perché il cammino così chiuso non racchiude singolarità. Per $t > 0$ si deve chiudere al di sopra e si ottiene $2\pi i$ per la somma dei residui nei due poli suddetti che nel $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$ risulta

$$-(2\pi)^{-4} 2\pi i \frac{e^{i|\mathbf{y}|t} - e^{-i|\mathbf{y}|t}}{2|\mathbf{y}|} e^{ix \cdot \mathbf{y}} = (2\pi)^{-3} \frac{\sin |\mathbf{y}|t}{|\mathbf{y}|} e^{ix \cdot \mathbf{y}}.$$

Il risultato è quindi

$$E_{rit} = (2\pi)^{-3} \int_{\mathbf{R}^3} e^{ix \cdot \mathbf{y}} \frac{\theta(t) \sin |\mathbf{y}|t}{|\mathbf{y}|} d^3\mathbf{y}. \quad (4.28)$$

Si ha quindi

$$(E_{rit}, \varphi) = (2\pi)^{-3} \int_{\mathbf{R}^3} d^3\mathbf{y} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(t) \sin |\mathbf{y}|t}{|\mathbf{y}|} dt \int_{\mathbf{R}^3} e^{ix \cdot \mathbf{y}} \varphi(x) d^3\mathbf{x} \quad (4.29)$$

$$= (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbf{R}^3} d^3\mathbf{y} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(t) \sin |\mathbf{y}|t}{|\mathbf{y}|} (F_{\mathbf{x}}^{-1}\varphi)(t, \mathbf{y}) dt. \quad (4.30)$$

D'altra parte

$$(E_{rit}, \varphi) = (F_{\mathbf{x}} E_{rit}, F_{\mathbf{x}}^{-1}\varphi)$$

e quindi si ottiene

$$F_{\mathbf{x}} E_{rit} = (2\pi)^{-3/2} \frac{\theta(t) \sin |\mathbf{y}|t}{|\mathbf{y}|}. \quad (4.31)$$

dove abbiamo indicato con $F_{\mathbf{x}}$ la trasformazione di Fourier rispetto alle sole variabili spaziali.

Facendo uso di

$$F\delta(r - a) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} a \frac{\sin a\rho}{\rho} \quad (4.32)$$

con l'identificazione $|\mathbf{y}| = \rho$ e $a = t$, si ottiene

$$E_{rit} = \theta(t)(2\pi)^{-3/2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t} \delta(|\mathbf{x}| - t) = \frac{\theta(t)}{4\pi|\mathbf{x}|} \delta(|\mathbf{x}| - t). \quad (4.33)$$

Si osservi che $\theta(t)\delta(|\mathbf{x}| + t) = 0$ perché $\theta(t)$ e $\delta(|\mathbf{x}| + t)$ hanno supporti disgiunti. Tenuto conto di ciò e della proprietà

$$\delta(t^2 - |\mathbf{x}|^2) = \frac{1}{2t} [\delta(|\mathbf{x}| + t) + \delta(|\mathbf{x}| - t)],$$

si ha anche

$$E_{rit} = \frac{\theta(t)}{2\pi} \delta(x^2), \quad (4.34)$$

in cui $x^2 := t^2 - |\mathbf{x}|^2$. Da tale espressione, essendo $\theta(t)$ invariante per trasformazioni proprie (ortocrone) di Lorentz, risulta che E_{rit} è invariante per trasformazioni proprie ortocrone di Lorentz. La ragione dell'aggettivo ritardato per E_{rit} è la seguente. Innanzitutto osserviamo che, essendo $r = |\mathbf{x}| = t$, è $dt = dr$ e quindi $\int_0^{+\infty} dt = \int_0^{+\infty} dr$. Quindi

$$(E_{rit}, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) \int_{S_t} \frac{\varphi(t = |\mathbf{x}|, \mathbf{x})}{|\mathbf{x}|} dS_t dt \quad (4.35)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} \int_{S_t} \frac{\varphi(t = |\mathbf{x}|, \mathbf{x})}{|\mathbf{x}|} dS_t dr \quad (4.36)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\varphi(t = |\mathbf{x}|, \mathbf{x})}{|\mathbf{x}|} d^3\mathbf{x}. \quad (4.37)$$

Tenendo conto di ciò si ottiene

$$(g * E_{rit}, \varphi) = (g(y), (E(z), \varphi(z + y))) \quad (4.38)$$

$$= \int g(y_0, \mathbf{y}) \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\varphi(y_0 + |\mathbf{z}|, \mathbf{z} + \mathbf{y})}{|\mathbf{z}|} d^3\mathbf{z} dy_0 d^3\mathbf{y}. \quad (4.39)$$

Ponendo $\mathbf{z} + \mathbf{y} = \mathbf{x}$ e, successivamente, $y_0 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = t$, si ottiene

$$(g * E_{rit}, \varphi) = \int g(y_0, \mathbf{y}) \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\varphi(y_0 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3\mathbf{x} dy_0 d^3\mathbf{y} \quad (4.40)$$

$$= \int_{\mathbf{R}^3} \int \frac{g(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \varphi(t, \mathbf{x}) d^3\mathbf{x} dt d^3\mathbf{y} \quad (4.41)$$

$$= \left(\int_{\mathbf{R}^3} \frac{g(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3\mathbf{y}, \varphi(t, \mathbf{x}) \right). \quad (4.42)$$

Quindi

$$f(t, \mathbf{x}) \equiv (g * E_{rit})(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^3} \frac{g(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3\mathbf{y}.$$

Questa f è soluzione dell'equazione

$$\square f = g \quad (4.43)$$

Si osservi che il valore al tempo t di f in \mathbf{x} è determinato dai valori della sorgente g nei vari punti \mathbf{y} ai tempi precedenti $t' = t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ e questa è la ragione dell'aggettivo ritardato.

Osserviamo che, con lo stesso procedimento, per l'operatore di Klein-Gordon

$$\square + m^2,$$

si ottiene la soluzione ritardata

$$E_{rit} = -(2\pi)^{-4} \int_{\mathbb{R}^4} \frac{e^{ix \cdot y}}{(y_0 - i0)^2 - |\mathbf{y}|^2 - m^2} d^4 y. \quad (4.44)$$

Osserviamo infine che in fisica si usa spesso la trasformata di Fourier in \mathbb{R}^4 con prodotto scalare

$$x \cdot y = x_0 y_0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

Le formule sono essenzialmente le stesse salvo qualche cambiamento di segno che può far apparire diverse formule che producono gli stessi risultati quando usate coerentemente nei calcoli.

5 Funzionali limitati e teorema di Riesz

Definizione Un funzionale lineare f su uno spazio normato X è *limitato* se esiste un numero reale $c > 0$ tale che $\forall x \in X$

$$|f(x)| \leq c \|x\| \quad (5.1)$$

Si definisce la *norma* di f come

$$\|f\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \quad (5.2)$$

oppure

$$\|f\| = \sup_{x \in X, \|x\|=1} |f(x)| \quad (5.3)$$

Dalla definizione segue

$$|f(x)| \leq \|f\| \|x\| \quad (5.4)$$

Si verifica che la norma soddisfa gli assiomi (1.17)-(1.20). La norma corrisponde all'*inf* c , per cui vale la (5.1).

Definizione Un funzionale lineare si dice *continuo* in X se per ogni successione $x_n \rightarrow x$ si ha $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Teorema Sia f un funzionale lineare continuo nell'origine. Allora f è continuo in tutto X .

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}$ una successione in X e sia $x_n \rightarrow x$. Allora $x_n - x \rightarrow 0$. Per la continuità in 0 $f(x_n - x) \rightarrow 0$ e dalla linearità di f segue $f(x_n) - f(x) \rightarrow 0$ e quindi f è continuo.

Teorema Un funzionale lineare è continuo se e solo se è limitato.

Dimostrazione. Sia f limitato. Dalla definizione segue

$$|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leq c\|x_n - x\| \quad (5.5)$$

e quindi f è continuo.

Viceversa sia f continuo. Supponiamo per assurdo che f non sia limitato. Allora possiamo trovare una successione $\{x_n\}$ con $x_n \neq 0$ tale che

$$|f(x_n)| \geq n\|x_n\| \quad (5.6)$$

Pertanto la successione $y_n = x_n/[n\|x_n\|] \rightarrow 0$ ma

$$|f(y_n)| = |f[x_n/(n\|x_n\|)]| \geq 1 \quad (5.7)$$

contrariamente all'ipotesi di continuità. Quindi f è limitato.

Esempio Consideriamo il funzionale f definito sullo spazio normato $C([a, b]; \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty$ da

$$f(x) = \int_a^b x(t)dt \quad (5.8)$$

con $x \in C([a, b]; \mathbf{R})$ e con la norma $\|x\|_\infty = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$. Il funzionale f è lineare e limitato ed ha norma $\|f\| = b - a$.

Infatti

$$|f(x)| = \left| \int_a^b x(t)dt \right| \leq (b - a) \max_{t \in [a, b]} |x(t)| = (b - a)\|x\| \quad (5.9)$$

Prendendo il sup su tutti gli x di norma 1, otteniamo $\|f\| \leq b - a$. Se in particolare prendiamo $x = 1$ che ha $\|x\| = 1$ otteniamo $\|f\| = b - a$. ■

L'insieme di tutti i funzionali lineari su uno spazio vettoriale X ha esso stesso la struttura di spazio vettoriale. Esso è denotato con X^* ed è detto *spazio duale algebrico*. Possiamo anche considerare il duale del duale $(X^*)^*$. $(X^*)^*$ è isomorfo a X .

Teorema della rappresentazione di Riesz Ad ogni funzionale lineare e continuo f definito su uno spazio di Hilbert H corrisponde uno ed un sol vettore $g \in H$ tale che

$$f(x) = \langle g, x \rangle \quad (5.10)$$

Dimostrazione. Se $\text{Ker}(f) = H$ allora il vettore $g = 0$ (vettore nullo). Sia $\text{Ker}(f) \neq H$. $\text{Ker}(f)$ è uno spazio vettoriale ed inoltre poichè f è continuo, $\text{Ker}(f)$ è chiuso e quindi

è un sottospazio chiuso di H . Dal teorema della proiezione segue $\text{Ker}(f)^\perp \neq \{0\}$, quindi esiste almeno un vettore non nullo $g_0 \in \text{Ker}(f)^\perp$. Per semplicità possiamo normalizzarlo a 1 ($\|g_0\| = 1$). Per ogni $x \in H$

$$f(x)g_0 - f(g_0)x \in \text{Ker}(f) \quad (5.11)$$

Pertanto dato che $g_0 \in \text{Ker}(f)^\perp$ avremo

$$0 = \langle g_0, f(x)g_0 - f(g_0)x \rangle = f(x) - f(g_0) \langle g_0, x \rangle \quad (5.12)$$

ovvero

$$f(x) = \langle \overline{f(g_0)}g_0, x \rangle \quad (5.13)$$

e quindi il vettore g è dato da

$$g = \overline{f(g_0)}g_0 \quad (5.14)$$

Dimostriamo che il vettore è unico. Supponiamo che $\forall x \in H$

$$f(x) = \langle g, x \rangle = \langle h, x \rangle \quad (5.15)$$

Quindi

$$\langle g - h, x \rangle = 0 \quad (5.16)$$

Prendiamo allora in particolare $x = g - h$ ed otteniamo la tesi dell'unicità.

6 Operatori lineari

6.1 Operatori limitati

Definizione Sia H uno spazio di Hilbert. Un operatore lineare è una applicazione $T : H \rightarrow H$ tale che

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty \quad (6.1)$$

$\forall x, y \in H$ e $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$. L'operatore sarà definito su un dominio $D_T \subseteq H$. Nel seguito la parola operatore indicherà sempre un operatore lineare.

L'immagine si dice *codominio* o *range* e sarà indicato con R_T . L'insieme dei vettori per cui $Tx = 0$ si dice *nucleo* di T e viene indicato con N_T o $\text{Ker}T$.

Definizione Un operatore T è *limitato* se esiste un numero reale $c > 0$ tale che $\forall x \in D_T$

$$\|Tx\| \leq c\|x\| \quad (6.2)$$

dove la norma è quella in H . La norma di un operatore è definita da

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \quad (6.3)$$

$\forall x \in D_T$.

Per dimostrare che un operatore non è limitato basta trovare una successione $\{x_n\} \in H$ con $\|x_n\| = 1$ tale che $\|Tx_n\| \rightarrow \infty$.

Esempio 1 L'operatore identità $I : H \rightarrow H$ è l'operatore definito da $Ix = x \forall x \in H$. Si ha $D_I = H$ e $N_I = \{0\}$. Si ha inoltre $\|I\| = 1$.

Esempio 2 L'operatore 0 definito da $0x = 0 \forall x \in H$. Si ha $D_0 = H$ e $N_0 = H$. La norma è $\|0\| = 0$.

Esempio 3 L'operatore di derivazione. Consideriamo lo spazio $L^2[0, 1]$. Cominciamo col definire l'operatore $T = d/dx$ solo per le funzioni $C^1[0, 1]$. Quindi $D_T = C^1[0, 1]$. L'operatore non è limitato. Consideriamo la successione $f_n(x) = \sin n\pi x$. Si ha

$$\|f_n\|^2 = \int_0^1 \sin^2 n\pi x dx = \frac{1}{2} \quad (6.4)$$

Mentre è

$$\|Tf_n\|^2 = n^2\pi^2/2 \quad (6.5)$$

e quindi

$$\frac{\|Tf_n\|^2}{\|f_n\|^2} \rightarrow \infty \quad (6.6)$$

Esempio 4 L'operatore di moltiplicazione per x . Consideriamo l'operatore Q definito da

$$Qf(x) = xf(x) \quad \text{con } f \in L^2[0, 1] \quad (6.7)$$

Si ha

$$\|Qf\|^2 = \int_0^1 x^2 |f(x)|^2 dx \leq \int_0^1 |f(x)|^2 dx \leq \|f\|^2 \quad (6.8)$$

Pertanto $\|Q\| \leq 1$ e l'operatore è limitato.

Consideriamo la famiglia di funzioni

$$f_\epsilon(x) = 0 \quad 0 \leq x \leq 1 - \epsilon \quad f_\epsilon(x) = 1 \quad 1 - \epsilon \leq x \leq 1 \quad (6.9)$$

Si ha $\|f_\epsilon\|^2 = \epsilon$ e $\|Qf_\epsilon\|^2 = \epsilon(1 - \epsilon + O(\epsilon^2))$ e quindi

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|Qf_\epsilon\|/\|f_\epsilon\| = 1 \quad (6.10)$$

Quindi $\|Q\| = 1$.

L'operatore Q in $L^2(\mathbf{R})$ invece non è limitato. Consideriamo la successione

$$f_n(x) = 1 \quad n \leq x \leq n + 1 \quad f_n(x) = 0 \quad \text{altrimenti} \quad (6.11)$$

con $n \geq 0$. Si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n^2(x) dx = 1 \quad (6.12)$$

e

$$\|Qf_n\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_n^2(x) dx = \frac{1}{3}(3n^2 + 3n + 1) \quad (6.13)$$

Quindi

$$\frac{\|Qf\|}{\|f\|} \geq n \quad (6.14)$$

Ma n può essere preso arbitrariamente grande e quindi l'operatore Q non è limitato.

Esempio 5 Consideriamo un operatore lineare su uno spazio H finito dimensionale. Sia e_1, e_2, \dots, e_n una base ortonormale in H . Se $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$ allora

$$\langle y, y \rangle = \|Tx\|^2 = \sum_{i=1}^n |\beta_i|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{\alpha}_i \alpha_j \langle Te_i, Te_j \rangle \quad (6.15)$$

Ma $|\alpha_i| = |\langle e_i, x \rangle| \leq \|x\| \|e_i\| = \|x\|$ e quindi

$$\|Tx\|^2 \leq \left(\sum_{i,j=1}^n |\langle Te_i, Te_j \rangle| \right) \|x\|^2 \quad (6.16)$$

ovvero l'operatore è limitato.

Inoltre nella base considerata è

$$\beta_k = \langle e_k, Tx \rangle = \sum_{i=1}^n \langle e_k, T\alpha_i e_i \rangle = \sum_{i=1}^n T_{ki} \alpha_i \quad (6.17)$$

dove $T_{ki} = \langle e_k, Te_i \rangle$. ■

La somma di due operatori S e T è definita da $(S+T)x = Sx + Tx \forall x \in D_{S+T} = D_S \cap D_T$. Analogamente si definisce il prodotto di operatori ST con $(ST)x = S(Tx)$ con $x \in D_{ST}$.

Valgono le disuguaglianze $\|S+T\| \leq \|S\| + \|T\|$ e $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$.

Definizione L'operatore T è *continuo* se $x_n \rightarrow x$ implica $Tx_n \rightarrow Tx$ nella norma di H .

Teorema L'operatore T è limitato se e solo se è continuo.

Dimostrazione Analoga al teorema sui funzionali continui.

Definizione L'operatore lineare \tilde{T} si dice una *estensione* dell'operatore T ($\tilde{T} \supset T$) se

i) $D_{\tilde{T}} \supset D_T$ ii) $\tilde{T}x = Tx \forall x \in D_T$

Teorema Un operatore lineare limitato T ha un'estensione $\tilde{T} : \overline{D_T} \rightarrow H$ dove \tilde{T} è un operatore lineare limitato e $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Dimostrazione. Consideriamo un $x \in \overline{D_T}$. Posso trovare una successione $\{x_n\} \in D_T$ tale che $x_n \rightarrow x$. Si ha

$$\|Tx_n - Tx_m\| \leq \|T\| \|x_n - x_m\| \quad (6.18)$$

quindi Tx_n è di Cauchy. Ma H è completo quindi $Tx_n \rightarrow y$. Definiamo

$$\tilde{T}x = y \quad (6.19)$$

Questa definizione è indipendente dalla successione scelta.

Per quanto riguarda la norma abbiamo

$$\|Tx_n\| \leq \|T\| \|x_n\| \quad (6.20)$$

Nel limite

$$\|\tilde{T}x\| \leq \|T\| \|x\| \quad (6.21)$$

Pertanto dalla definizione di norma $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$. D'altra parte essendo \tilde{T} una estensione $\|\tilde{T}\| \geq \|T\|$. Quindi in definitiva $\|\tilde{T}\| = \|T\|$. ■

E' possibile poi estendere T a tutto H , ponendo $\tilde{T}x = 0$ quando $x \in \overline{D_T}^\perp$. Anche in questa estensione la norma non cambia.

6.2 Operatore inverso

Sia T un operatore lineare.

Definizione L'operatore $T : D_T \rightarrow H$ è detto *iniettivo* se $x_1, x_2 \in D_T$

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow Tx_1 \neq Tx_2 \quad (6.22)$$

o equivalentemente

$$Tx_1 = Tx_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad (6.23)$$

In questo caso esiste l'operatore *inverso* $T^{-1} : R_T \rightarrow D_T$ tale che

$$T^{-1}Tx = x \quad \forall x \in D_T \quad (6.24)$$

ovvero

$$TT^{-1}y = y \quad \forall y \in R_T \quad (6.25)$$

Teorema L'operatore inverso esiste se e solo se

$$Tx = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (6.26)$$

Dimostrazione. Supponiamo che $Tx = 0 \Rightarrow x = 0$. Sia $Tx_1 = Tx_2$. Poichè T è lineare segue $T(x_1 - x_2) = 0$ e quindi $x_1 - x_2 = 0$. Per la (6.23) quindi esiste l'operatore inverso. Viceversa se esiste l'inverso, ponendo $x_2 = 0$ nella (6.23), otteniamo $Tx_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$. ■

In generale l'inverso di un operatore limitato non è limitato (lo è nel caso in cui H sia finito dimensionale).

Se esiste l'operatore inverso allora l'equazione $Tx = y$ con $y \in R_T$ ha l'unica soluzione $x = T^{-1}y$.

Teorema Sia T un operatore su H . T ammette inverso limitato se e solo se esiste un numero reale $c > 0$ tale che

$$\|Tx\| \geq c\|x\| \quad \forall x \in D_T \quad (6.27)$$

Dimostrazione. Infatti dalla (6.27) segue $N_T = \{0\}$ e quindi T^{-1} esiste. Infatti se vale la (6.27) l'unica soluzione dell'equazione $Tx = 0$ è $x = 0$. Inoltre, posto $y = Tx$, segue $\|x\| \leq \frac{1}{c}\|y\|$, ovvero

$$\frac{\|T^{-1}y\|}{\|y\|} \leq \frac{1}{c} \quad (6.28)$$

da cui segue che l'inverso è limitato. Viceversa se esiste T^{-1} limitato la (6.28) è soddisfatta con $c = \|T^{-1}\|^{-1}$ e posto $x = T^{-1}y$ otteniamo la (6.27).

6.3 Operatore aggiunto

Definiremo prima l'aggiunto per operatori limitati e in seguito per operatori non limitati ma con dominio denso in H .

Consideriamo operatori limitati definiti su tutto H .

Se $y \in H$ è un elemento fissato e T un operatore lineare limitato l'applicazione

$$x \rightarrow \langle y, Tx \rangle: H \rightarrow \mathbf{C} \quad (6.29)$$

è un funzionale lineare e limitato. Per il teorema di Riesz esiste un e un solo elemento $z \in H$ tale che

$$\langle z, x \rangle = \langle y, Tx \rangle \quad (6.30)$$

Si vede facilmente che l'elemento z dipende linearmente da y per cui possiamo scrivere

$$z = T^*y \quad (6.31)$$

dove T^* è un operatore lineare definito su tutto H . Il teorema di Riesz garantisce l'esistenza dell'operatore T^* . Inoltre l'operatore T^* è limitato, infatti vale

$$|\langle T^*y, x \rangle| = |\langle y, Tx \rangle| \leq \|y\| \|Tx\| \quad (6.32)$$

e quindi

$$\frac{\|T^*y\|}{\|y\|} \leq \|T\| \quad (6.33)$$

Definizione Sia T limitato con $D_T = H$. Definiamo *aggiunto* di T l'operatore T^* che soddisfa alla relazione

$$\langle y, Tx \rangle = \langle T^*y, x \rangle \quad \forall x, y \in H \quad (6.34)$$

Teorema Valgono le relazioni

$$i) \quad (T + S)^* = T^* + S^* \quad (6.35)$$

$$ii) \quad (\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^* \quad (6.36)$$

$$iii) \quad (ST)^* = T^* S^* \quad (6.37)$$

$$iv) \quad T^{**} = T \quad (6.38)$$

Dimostriamo solo l'ultima.

$$\langle T^{**}y, z \rangle = \overline{\langle T^*z, y \rangle} = \overline{\langle z, Ty \rangle} = \langle Ty, z \rangle \quad \forall z, y \in H \quad (6.39)$$

e quindi $T^{**} = T$.

Teorema Se T^* è l'operatore aggiunto vale $\|T\| = \|T^*\|$.

Dimostrazione. Infatti per ogni x è

$$0 \leq \|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle x, T^*Tx \rangle \leq \|x\| \|T^*Tx\| \leq \|x\| \|T^*\| \|Tx\| \quad (6.40)$$

da cui segue

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \|T^*\| \quad (6.41)$$

e quindi (per la definizione di norma) $\|T\| \leq \|T^*\|$. D'altra parte $\|T^*x\| \geq 0$, da cui procedendo in modo analogo si ricava $\|T^*\| \leq \|T\|$ pertanto $\|T^*\| = \|T\|$.

Definizione Un operatore limitato definito su tutto H è detto

i) normale se $T^*T = TT^*$,

ii) autoaggiunto (anche hermitiano) se $T^* = T$

iii) unitario se $T^*T = I = TT^*$

Definizione Un operatore T con dominio $D_T = H$ è detto *isometrico* se

$$\langle Tx, Tx \rangle = \langle x, x \rangle \quad \forall x \in H \quad (6.42)$$

Teorema Un operatore T con dominio $D_T = H$ è isometrico se e solo se

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in H \quad (6.43)$$

Dimostrazione. Infatti dalla (6.43) prendendo $x = y$ segue la (6.42). Viceversa dalla (6.42) è possibile ricavare la (6.43) considerando la (6.42) con $x = x + y$ e $x = x + iy$.

Teorema Un operatore isometrico con range su tutto H è unitario.

Dimostrazione. Infatti per la (6.42) $Tx = 0$ implica $x = 0$ e quindi esiste T^{-1} . Inoltre

$$\langle x, Tx \rangle = \langle TT^{-1}x, Tx \rangle = \langle T^{-1}x, x \rangle \quad (6.44)$$

dove nel primo passaggio abbiamo utilizzato l'ipotesi che il range di T sia tutto H . Pertanto segue $T^* = T^{-1}$ e quindi anche $TT^* = I$.

Definizione Un operatore limitato P si dice una *proiezione* se $P^2 = P$. L'operatore è detto una *proiezione ortogonale* se $P^2 = P$ e $P^* = P$.

Teorema Sia $H = M \oplus N$, in modo che $x = y + z$ con $y \in M$ e $z \in N$. Posto $y = Px$ l'operatore P è

- i) lineare
- ii) limitato
- iii) idempotente

Dimostrazione. Segue dalla definizione di P e dal fatto che se $y \in M$ $P y = y$, se $z \in N$ $P z = 0$.

Teorema Sia P un operatore limitato idempotente. Sia $M = \{y \in H | P y = y\}$ ed $N = \{z \in H | P z = 0\}$. Allora $H = M \oplus N$.

Dimostrazione. Basta notare che $x - P x \in N \forall x \in H$. Quindi $x = P x + x - P x$.

Quindi se P è una proiezione anche $I - P$ lo è.

Teorema Sia P una proiezione ed $H = M \oplus N$ la corrispondente decomposizione di H . Sia P^* l'aggiunto di P . Allora

- i) P^* è un proiettore
- ii) se P è autoaggiunto $N = (M)^\perp$.

Dimostrazione. i) Essendo P limitato anche P^* lo sarà ($\|P^*\| = \|P\|$). Inoltre

$$\langle P^* y, x \rangle = \langle y, P x \rangle = \langle y, P^2 x \rangle = \langle P^* y, P x \rangle = \langle (P^*)^2 y, x \rangle \quad \forall x, y \in H \quad (6.45)$$

da cui segue $(P^*)^2 = P^*$.

ii) Sia $P^* = P$. Dimostriamo prima che se $z \in N$ allora $z \in M^\perp$. Prendiamo $y \in M$ e $z \in N$. Allora

$$\langle z, y \rangle = \langle z, P y \rangle = \langle P^* z, y \rangle = \langle P z, y \rangle = \langle 0, y \rangle = 0 \quad (6.46)$$

quindi $N \subseteq M^\perp$.

Viceversa sia $v \in M^\perp$ e $x \in H$. Vogliamo dimostrare che $v \in N$. Vale

$$\langle x, P v \rangle = \langle x, P^* v \rangle = \langle P x, v \rangle = 0 \quad (6.47)$$

Essendo x arbitrario segue $P v = 0$, quindi $M^\perp \subseteq N$ ed in definitiva $N = M^\perp$.

Esempio 1 Sia T limitato con dominio $D_T = H$. Sia $\{e_i\}$ una base ortonormale in H . Sia $t_{ji} = \langle e_j, T e_i \rangle$ la rappresentazione matriciale dell'operatore T sulla base $\{e_i\}$. Si ha

$$t_{ji} = \langle e_j, T e_i \rangle = \langle T^* e_j, e_i \rangle = \overline{\langle e_i, T^* e_j \rangle} = \overline{(t_{ij}^*)} \quad (6.48)$$

da cui segue

$$t_{ij}^* = \overline{t_{ji}} \quad (6.49)$$

Esempio 2 Ricordiamo la definizione di trasformata di Fourier:

$$Ff(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(x)e^{-ixy} dx \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \subset L^2(\mathbf{R}^n) \quad (6.50)$$

L'operatore definito dalla trasformata di Fourier, $F : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, ammette inverso F^{-1} . Inoltre F è isometrico. Infatti dalla formula di Parseval,

$$\int |Ff(y)|^2 dy = \int |f(x)|^2 dx \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \quad (6.51)$$

segue $\|Ff\| = \|f\| \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. F e F^{-1} possono estendersi per continuità a tutto $L^2(\mathbf{R}^n)$. Abbiamo quindi un operatore F con $D_F = \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, che è denso in $L^2(\mathbf{R}^n)$, e la cui norma vale $\|F\| = 1$.

Per una $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$, la trasformata di Fourier è definita come

$$Ff = \lim_{m \rightarrow \infty} Ff_m \quad (6.52)$$

con $f_m \in L^2(\mathbf{R}^n) \cap L^1(\mathbf{R}^n)$ e $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = f$. Per esempio la successione $\{f_m\}$ può essere scelta nel modo seguente

$$f_m(x) = \begin{cases} f(x) & |x| \leq m \\ 0 & |x| > m \end{cases} \quad (6.53)$$

dove $|x| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$.

In modo analogo possiamo estendere F^{-1} . Quindi è

$$FF^{-1} = F^{-1}F = I \quad (6.54)$$

su tutto $L^2(\mathbf{R}^n)$, ovvero l'operatore F è unitario.

6.4 Operatori non limitati

Gli operatori autoaggiunti definiti su tutto H costituiscono l'analogo delle matrici hermitiane.

Se A è una matrice $n \times n$ tale che $\langle y, Ax \rangle = \langle Ay, x \rangle \quad \forall x, y \in V$ spazio vettoriale di dimensione finita, la matrice è detta hermitiana ed ammette un insieme ortonormale di autovettori. Lo stesso è vero per un operatore limitato ed autoaggiunto T definito su tutto H . Comunque molti operatori della meccanica quantistica sono operatori non limitati e non sono definiti su tutto H . Vale infatti il teorema seguente.

Teorema (Hellinger e Toeplitz) Sia T un operatore lineare definito su tutto H . Sia inoltre

$$\langle y, Tx \rangle = \langle Ty, x \rangle \quad \forall x, y \in H \quad (6.55)$$

Allora T è limitato. ■

Dimostrazione. Vedi [1] pag. 525.

Questo suggerisce che il generico operatore non limitato abbia dominio $D_T \subset H$. Definiremo il suo aggiunto solo nel caso in cui D_T sia denso in H .

Definizione Un operatore T con $\overline{D_T} = H$ è detto *densamente definito*. ■

Ogni operatore limitato è anche densamente definito, ma esistono comunque operatori densamente definiti non limitati. Vediamo come definire l'aggiunto per operatori densamente definiti.

Consideriamo per ogni fissato $y \in H$ l'applicazione

$$x \rightarrow \langle y, Tx \rangle \quad \forall x \in D_T \quad (6.56)$$

dove T è un operatore densamente definito. Questo non è più un funzionale limitato e quindi non possiamo ricorrere al lemma di Riesz.

Possiamo comunque definire l'operatore aggiunto

$$T^* : D_{T^*} \rightarrow H \quad (6.57)$$

il cui dominio D_{T^*} è costituito dai vettori $y \in H$ tali che esiste un $y^* \in H$ per cui vale

$$\langle y, Tx \rangle = \langle y^*, x \rangle \quad \forall x \in D_T \quad (6.58)$$

L'operatore T^* è allora definito da

$$y^* = T^*y \quad (6.59)$$

L'operatore T^* è lineare (y^* dipende linearmente da y). Questa formula determina y^* univocamente poichè D_T è denso in H . Infatti se D_T non fosse denso in H , $\overline{D_T} \neq H$, quindi $(\overline{D_T})^\perp \neq \{0\}$, ovvero esisterebbe un $y_1 \perp x$ e quindi anche $y^* + y_1$ sarebbe soluzione di (6.58).

Teorema Siano S , T e ST operatori densamente definiti. Allora

- i) Se S^* è densamente definito, $S \subset S^{**}$
- ii) se $S \subset T$ $T^* \subset S^*$
- iii) $T^*S^* \subset (ST)^*$. Se uno dei due operatori è limitato, vale $T^*S^* = (ST)^*$
- iv) Se T^{-1} esiste ed è densamente definito, $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$

Dimostrazione. Vedi [4] pag. 348, [1] pag. 531.

iii) Se $x \in D_{ST}$ e $y \in D_{T^*S^*}$ abbiamo

$$\langle y, STx \rangle = \langle S^*y, Tx \rangle = \langle T^*S^*y, x \rangle \quad (6.60)$$

Inoltre se $Tx \in D_S$ e $y \in D_{S^*}$

$$\langle y, STx \rangle = \langle S^*y, Tx \rangle \quad (6.61)$$

quindi

$$\langle y, STx \rangle = \langle T^*S^*y, x \rangle = \langle (ST)^*y, x \rangle \quad (6.62)$$

Pertanto se $y \in D_{T^*S^*}$, è $y \in D_{(ST)^*}$. In definitiva

$$D_{T^*S^*} \subset D_{(ST)^*} \quad (6.63)$$

Se S è limitato $D_S = D_{S^*} = H$. Preso $y \in D_{(ST)^*}$, $\forall x \in D_{ST}$ abbiamo

$$\langle S^*y, Tx \rangle = \langle y, STx \rangle = \langle (ST)^*y, x \rangle \quad (6.64)$$

Quindi $S^*y \in D_{T^*}$ e $y \in D_{T^*S^*}$, ovvero

$$D_{(ST)^*} \subset D_{T^*S^*} \quad (6.65)$$

Combinando con la eq.(6.63) si ottiene

$$(ST)^* = T^*S^* \quad (6.66)$$

Definizione Un operatore T in H è detto *simmetrico* se è densamente definito e se vale

$$\langle Ty, x \rangle = \langle y, Tx \rangle \quad \forall x, y \in D_T \quad (6.67)$$

Se vale la (6.67), senza che l'operatore sia densamente definito, l'operatore si dice *hermitiano*.

Se $T = T^*$ l'operatore si dice *autoaggiunto*.

Teorema Un operatore su H è simmetrico se e solo se è densamente definito e

$$T \subset T^* \quad (6.68)$$

Dimostrazione. Per definizione di aggiunto

$$\langle T^*y, x \rangle = \langle y, Tx \rangle \quad \forall x \in D_T \quad y \in D_{T^*} \quad (6.69)$$

Assumiamo che $T \subset T^*$. Allora

$$\langle Ty, x \rangle = \langle y, Tx \rangle \quad \forall x, y \in D_T \quad (6.70)$$

e quindi T è simmetrico. Viceversa supponiamo che valga la (6.70). Per confronto con la (6.69) si vede che T^* è una estensione di T .

Teorema Sia T un operatore (definito su tutto H o densamente definito). Allora si ha

$$N_{T^*} = (R_T)^\perp \quad (6.71)$$

Dimostrazione. Se $y \in N_{T^*}$ $T^*y = 0$ che implica $\langle T^*y, x \rangle = 0 \quad \forall x \in H$ da cui segue $\langle y, Tx \rangle = 0 \quad \forall x \in D_T$ e quindi $y \in (R_T)^\perp$. Viceversa se $y \in (R_T)^\perp$ segue

$0 = \langle y, Tx \rangle = \langle 0, x \rangle$ che implica che y è nel dominio dell'aggiunto e $T^*y = 0$, quindi $y \in N_{T^*}$. Pertanto $N_{T^*} = (R_T)^\perp$.

Nel caso di operatori non limitati un nuovo concetto, quello di chiusura, sostituisce quello di continuità.

La classe degli operatori chiusi contiene quella degli operatori limitati ed una parte di quelli non limitati.

Definizione Sia T un operatore con $D_T \subset H$.

T è detto *chiuso*

$$x_n \rightarrow x \text{ e } Tx_n \rightarrow y \quad (6.72)$$

implicano $x \in D_T$ e $Tx = y$.

Notiamo la differenza rispetto al concetto di continuità. Qui l'esistenza del limite $Tx_n \rightarrow y$ è assunta, mentre nella continuità se $x_n \rightarrow x$ ne segue $Tx_n \rightarrow Tx$.

Teorema L'operatore aggiunto di un operatore densamente definito è chiuso.

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}$ una successione in D_{T^*} e $x_n \rightarrow x$ e $T^*x_n \rightarrow y$. Ma

$$\langle x_n, Tz \rangle = \langle T^*x_n, z \rangle \quad (6.73)$$

$\forall z \in D_T$. Per la continuità del prodotto interno

$$\langle x_n, Tz \rangle \rightarrow \langle x, Tz \rangle = \langle y, z \rangle \quad (6.74)$$

Pertanto $x \in D_{T^*}$ e $y = T^*x$. Quindi T^* è chiuso.

Definizione Se un operatore non limitato T non è chiuso, ma ammette una estensione chiusa, T si dice *chiudibile*. L'estensione minimale è detta la *chiusura* di T e si indica con \overline{T} .

Teorema Sia T un operatore simmetrico. Allora la sua chiusura esiste ed è unica ed inoltre

$$(\overline{T})^* = T^* \quad (6.75)$$

Dimostrazione. Vedi [1] pag. 539.

Teorema Sia T un operatore chiuso densamente definito. Allora D_{T^*} è denso in H e vale

$$T^{**} = T \quad (6.76)$$

Dimostrazione. Vedi [4] pag. 354.

Ricordiamo che in generale per operatori densamente definiti è $T \subset T^{**}$.

Definizione Un operatore T con dominio $D_T \subset H$ è detto *isometrico* se

$$\langle Tx, Tx \rangle = \langle x, x \rangle \quad \forall x \in D_T \quad (6.77)$$

Esempio 1 Consideriamo l'operatore $T = i \frac{d}{dx}$ definito su $D_T = C^1[0, 1] \subset L^2[0, 1]$. Dato che $\overline{D_T} = L^2[0, 1]$ l'operatore è densamente definito. L'operatore T non è chiuso. Infatti se consideriamo la successione delle somme parziali della serie di Fourier $\{u_n\}$ tendente in $L^2[0, 1]$ alla funzione $u(x) = |x - \frac{1}{2}|$, la successione delle derivate $\{u'_n\}$ tende in $L^2[0, 1]$ a $v = \theta(x - \frac{1}{2}) - \theta(\frac{1}{2} - x)$, ma $u \notin C^1[0, 1]$, quindi l'operatore T non è chiuso. E' possibile però estendere il dominio di definizione dell'operatore T in modo da renderlo chiuso. L'operatore T , definito su $C^1[0, 1]$ con opportune condizioni al contorno (per esempio $f(0) = f(1) = 0$), è simmetrico, infatti

$$\langle g, Tf \rangle = \int_0^1 \overline{g(x)} i f'(x) dx = \int_0^1 \overline{i g'(x)} f(x) dx = \langle Tg, f \rangle \quad (6.78)$$

e quindi e' chiudibile.

Ricordiamo la definizione seguente. Una funzione f è *assolutamente continua* se

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(x) \quad \text{con } g \in L^1[a, b] \quad (6.79)$$

(o equivalentemente se è derivabile q.o. e la derivata è L^1).

Se consideriamo come dominio l'insieme delle funzioni assolutamente continue in $L^2[0, 1]$ con derivata in $L^2[0, 1]$ il nuovo operatore \bar{T} è chiuso.

Esempio 2 Consideriamo l'operatore $i \frac{d}{dx}$ sullo spazio $L^2[a, b]$. Questo è definito su tutte le funzioni di $L^2[a, b]$ assolutamente continue (derivabili q.o. su $[a, b]$) con $f' \in L^2[a, b]$. Indichiamo tale insieme con \mathcal{D} .

Possiamo definire l'operatore T_0

$$(T_0 f)(x) = i f'(x) \quad (6.80)$$

dove $f \in \mathcal{D}$ e $f(a) = f(b) = 0$. Il dominio di definizione di T_0 è denso in $L^2[a, b]$. E' poi

$$\begin{aligned} \langle g, T_0 f \rangle &= \int_a^b \overline{g(x)} i f'(x) dx \\ &= \int_a^b \overline{i g'(x)} f(x) dx - \overline{i g(x)} f(x) \Big|_a^b \\ &= \int_a^b \overline{i g'(x)} f(x) dx \\ &= \langle T_0 g, f \rangle \end{aligned} \quad (6.81)$$

Quindi T_0 è simmetrico. Inoltre, non essendo necessarie condizioni al contorno per g , si ha $D_{T_0} \subset D_{T_0^*}$. Pertanto T_0 non è autoaggiunto.

Questo operatore ha un numero infinito di estensioni autoaggiunte sostituendo la condizione $f(a) = f(b) = 0$ con quella più debole $f(a) = f(b)\exp(i\phi)$ con $0 \leq \phi < 2\pi$. In questo caso, usando le condizioni al contorno sia per f che per g , si ottiene

$$\overline{ig(x)f(x)}\Big|_a^b = \overline{ig(b)f(b)} - \overline{ig(a)f(a)} = \overline{ig(b)f(b)} - \overline{ig(b)f(b)} = 0 \quad (6.82)$$

Consideriamo quindi l'operatore T_1 definito sul dominio

$$D_{T_1} = \mathcal{D} \cap \{f | f(a) = f(b)\} \quad (6.83)$$

T_1 è un operatore autoaggiunto, ovvero simmetrico ed inoltre $D_{T_1} = D_{T_1^*}$.

Procedendo come in (6.81) è facile dimostrare che l'operatore è simmetrico. Studiamo adesso il dominio dell'aggiunto T_1^* . Sia $g \in D_{T_1^*}$ e poniamo $\varphi = T_1^*g$ con $\varphi \in L^2[a, b]$:

$$\begin{aligned} \int_a^b \bar{g}i f' dx &= \langle g, T_1 f \rangle = \langle T_1^* g, f \rangle = \int_a^b \bar{\varphi} f dx \\ &= \int_a^b \frac{d}{dx} \int_a^x \bar{\varphi}(y) dy f(x) dx \\ &= - \int_a^b \int_a^x \bar{\varphi}(y) dy f'(x) dx + f(b) \int_a^b \bar{\varphi}(y) dy \\ &= - \int_a^b \bar{\Phi}(x) f'(x) dx + \bar{\Phi}(b) f(b) \end{aligned} \quad (6.84)$$

dove abbiamo definito

$$\Phi(x) = \int_a^x \varphi(y) dy \quad (6.85)$$

La funzione costante è in D_{T_1} , quindi dalla (6.84) segue

$$\bar{\Phi}(b) f(b) = 0 \quad (6.86)$$

Notiamo che con le condizioni per T_0 questa è automaticamente soddisfatta, mentre per l'operatore T_1 questa implica

$$\Phi(b) = \int_a^b T_1^* g = 0 \quad (6.87)$$

Dalla (6.84) segue allora

$$\int_a^b \overline{(ig - \Phi)}(x) f'(x) dx = 0 \quad (6.88)$$

che implica $ig - \Phi \in R_{T_1}^\perp$. Ma

$$R_{T_1}^\perp = \{f \in L^2[a, b] \mid f = cost\} \quad (6.89)$$

Infatti

$$\int_a^b c f'(x) dx = c[f(b) - f(a)] = 0 \quad (6.90)$$

Quindi

$$ig(x) - \Phi(x) = cost \quad (6.91)$$

ovvero

$$g(x) = cost + \int_a^x \varphi(x) dx \quad (6.92)$$

con $\varphi \in L^2[a, b]$. Quindi g è assolutamente continua e ha derivata in $L^2[a, b]$.

La condizione (6.87) implica

$$\int_a^b \varphi(x) dx = i \int_a^b g'(x) dx = i[g(b) - g(a)] = 0 \quad (6.93)$$

In definitiva

$$D_{T_1^*} = \{g \in L^2[a, b] \mid g \in \mathcal{D}, g(a) = g(b)\} \quad (6.94)$$

Infine l'operatore $T = i \frac{d}{dx}$ sullo spazio $L^2(\mathbf{R})$ con $D_T = \mathcal{D}$, ovvero con dominio sulle funzioni di $L^2(\mathbf{R})$, assolutamente continue su ogni intervallo finito con $f' \in L^2(\mathbf{R})$, è simmetrico ed autoaggiunto. L'autoaggiuntezza sarà dimostrata più avanti. La dimostrazione del fatto che l'operatore è simmetrico segue integrando per parti e utilizzando la seguente proprietà. Se $f \in L^2(\mathbf{R})$ e $f' \in L^2(\mathbf{R})$ allora $f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow \pm\infty$ ([7], pag.197). L'appartenenza di una funzione ad $L^2(\mathbf{R})$ non implica l'annullamento all'infinito, per esempio $f(x) = \exp(-x^4 \sin^2 x)$.

7 Criteri per l'autoaggiuntezza

Dimostriamo prima il seguente

Teorema Se T è simmetrico e chiuso, $R_{T \pm i}$ è chiuso.

Dim. Sia $y \in \overline{R_{T-i}}$. Possiamo trovare una successione $x_n \in D_T$ tale che $(T-i)x_n \rightarrow y$. Ma

$$\begin{aligned}
\|(T-i)(x_m-x_n)\|^2 &= \langle (T-i)(x_n-x_m), (T-i)(x_n-x_m) \rangle \\
&= \|T(x_m-x_n)\|^2 + \|x_m-x_n\|^2 \\
&\geq \|x_m-x_n\|^2
\end{aligned} \tag{7.1}$$

quindi

$$\|x_m-x_n\| \leq \|(T-i)(x_m-x_n)\| < \epsilon \tag{7.2}$$

Pertanto anche la successione x_n è convergente, $x_n \rightarrow x$. Ma T è chiuso, quindi lo è anche $T-i$; perciò $x_n \rightarrow x$ ($T-i)x_n \rightarrow y$ implicano $x \in D_{T-i}$, $y = (T-i)x$, ovvero $y \in R_{T-i}$, e perciò R_{T-i} è chiuso.

Analogamente vale per $T+i$.

Possiamo ora dimostrare i seguenti criteri.

Teorema Sia T un operatore simmetrico. Le seguenti proposizioni sono equivalenti.

- i) T è autoaggiunto
- ii) T è chiuso e $\text{Ker}(T^* \pm i) = \{0\}$
- iii) $R_{T \pm i} = H$

Dimostrazione. i) \rightarrow ii). Se $T = T^*$, dato che l'aggiunto di un operatore densamente definito è chiuso, allora T è chiuso. Inoltre

$$\begin{aligned}
\|(T \pm i)x\|^2 &= \langle Tx \pm ix, Tx \pm ix \rangle \\
&= \|Tx\|^2 + \|x\|^2 \pm i \langle Tx, x \rangle \mp i \langle x, Tx \rangle \\
&= \|Tx\|^2 + \|x\|^2 \geq \|x\|^2
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Pertanto $(T \pm i)x = 0$ implica $x = 0$. Quindi $\text{Ker}(T^* \pm i) = \{0\}$.

ii) \rightarrow iii) Essendo T chiuso e simmetrico, $R_{T \pm i}$ è chiuso e perciò

$$R_{T \pm i} = (R_{T \pm i}^\perp)^\perp = (\text{Ker}(T^* \mp i))^\perp = \{0\}^\perp = H \tag{7.4}$$

dove abbiamo ancora utilizzato la (6.71).

iii) \rightarrow i) Essendo $T \subset T^*$ basta verificare che $D_{T^*} \subset D_T$. Sia $x \in D_{T^*}$. Se consideriamo $(T^* - i)x$, dato che $R_{T \pm i} = H$, esiste $y \in D_T$ tale che $(T - i)y = (T^* - i)x$ e quindi, essendo $T \subset T^*$

$$(T^* - i)(x - y) = 0 \tag{7.5}$$

D'altra parte, utilizzando ancora la (6.71), essendo $R_{T+i} = H$ è $\text{Ker}(T^* - i) = R_{T+i}^\perp = \{0\}$ e quindi $y = x$ ovvero $x \in D_T$.

Esempio 1 Sia Q l'operatore in $L^2(\mathbf{R})$ definito da

$$Qf(x) = xf(x) \quad f \in L^2(\mathbf{R}) \quad (7.6)$$

con dominio

$$D_Q = \{f \in L^2(\mathbf{R}) \mid xf(x) \in L^2(\mathbf{R})\} \quad (7.7)$$

D_Q contiene $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ che è denso in $L^2(\mathbf{R})$. Si verifica facilmente che l'operatore è simmetrico. Utilizzeremo il criterio iii) per dimostrare l'autoaggiuntezza. Presa $f \in L^2(\mathbf{R})$ le funzioni $\frac{1}{x \pm i}f(x) \in D_Q$. Pertanto

$$(Q \pm i)\frac{1}{x \pm i}f(x) = f(x) \quad \forall f \in L^2(\mathbf{R}) \quad (7.8)$$

e quindi $R_{Q \pm i} = L^2(\mathbf{R})$.

Esempio 2 Consideriamo l'operatore di derivazione $P = -i\frac{d}{dx}$ in $H = L^2(\mathbf{R})$ con dominio

$$D_P = \{f \in L^2(\mathbf{R}) \mid f \in \mathcal{D} \text{ e } f' \in L^2(\mathbf{R})\} \quad (7.9)$$

L'operatore P è densamente definito e non limitato (come abbiamo già visto).

Inoltre, prendendo la trasformata di Fourier di f l'operatore P è unitariamente equivalente (l'operatore F è unitario) all'operatore di moltiplicazione. Infatti se

$$Ff(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-iyx} f(x) \quad (7.10)$$

segue $FPf(y) = yFf(y)$. Ovvero $FP = QF$, dove Q è l'operatore di moltiplicazione per y , e pertanto

$$P = F^{-1}QF \quad (7.11)$$

Essendo Q autoaggiunto con $\overline{D}_Q = H$ e F unitario, ne segue, utilizzando il teorema sull'aggiunto del prodotto (pag. 23), che P è autoaggiunto ($P^* = F^*Q^*(F^{-1})^* = F^{-1}QF$).

Esempio 3 Per dimostrare l'autoaggiuntezza dell'operatore $T = i\frac{d}{dx}$ su $L^2(\mathbf{R})$ possiamo anche utilizzare il criterio ii). Abbiamo già visto come costruirne una estensione chiusa, considerandolo definito su \mathcal{D} . Determiniamo il $Ker(T^* \pm i)$. Da $(T^* \pm i)f = 0$ segue $i(f' \pm f) = 0$ da cui $f(x) = c \exp(\pm x) \notin L^2(\mathbf{R})$. Quindi $Ker(T^* \pm i) = \{0\}$.

8 Elementi di teoria spettrale degli operatori

8.1 Spettro di un operatore

Rivediamo brevemente la teoria spettrale degli operatori su spazi finiti dimensionali. In tali spazi, una volta introdotta una base, l'operatore è rappresentato da una matrice e la teoria spettrale si riduce alla teoria degli autovalori e degli autovettori della matrice. Se

l'operatore è rappresentato da una matrice A $n \times n$, autovalori ed autovettori sono definiti dall'equazione

$$Ax = \lambda x \quad (8.1)$$

Definizione Un *autovalore* è un numero $\lambda \in \mathbf{C}$ tale che esiste una soluzione alla (8.1) $x \neq 0$. Il vettore x è detto *autovettore*. Gli autovettori corrispondenti ad un dato λ , insieme al vettore nullo, costituiscono un sottospazio, M_λ , detto *autospatio*.

L'insieme degli autovalori $\sigma(A)$ è detto *spettro* di A . Il suo complemento $\rho(A) = \mathbf{C} \setminus \sigma(A)$ è detto *insieme risolvente* di A .

Ricordiamo i teoremi seguenti.

Teorema Gli autovalori della matrice A corrispondono alle soluzioni dell'*equazione caratteristica* o *secolare* $\det(A - \lambda I) = 0$.

Teorema Ogni autovalore distinto possiede almeno un autovettore ed autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono indipendenti.

Nel caso di spazi infinito dimensionali la teoria spettrale diventa più complicata.

Se T è un operatore lineare su uno spazio di Hilbert H , il piano \mathbf{C} è suddiviso in tre insiemi, a seconda delle proprietà dell'operatore $T_\lambda = T - \lambda I$, dove $\lambda \in \mathbf{C}$ e I è l'operatore identità.

Se T_λ ammette inverso, lo indicheremo con

$$R_\lambda = T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1} \quad (8.2)$$

e lo chiameremo *operatore risolvente*. Il motivo del nome sta nel fatto che in questo caso l'equazione $T_\lambda x = y$ ammette una sola soluzione.

Diamo allora la seguente

Definizione Sia T un operatore con dominio D_T . Consideriamo l'operatore risolvente R_λ . Se l'operatore R_λ esiste, limitato, con dominio denso in H λ è detto un *valore regolare*. L'insieme di tutti i valori regolari è detto *insieme risolvente* e viene indicato con $\rho(T)$. Il suo complemento in \mathbf{C} è lo *spettro*, $\sigma(T) = \mathbf{C} \setminus \rho(T)$. Se $\lambda \in \sigma(T)$ λ si dice un *valore spettrale*.

Definizione L'insieme dei valori spettrali per cui R_λ non esiste è detto *spettro discreto* o *puntuale* $\sigma_p(T)$. L'insieme dei valori spettrali per cui R_λ esiste, con dominio denso in H , ma non limitato è detto *spettro continuo* $\sigma_c(T)$. L'insieme dei valori spettrali per cui R_λ esiste, limitato o non limitato, ma con dominio che non è denso in H , è detto *spettro residuo* $\sigma_r(T)$.

Per esempio nei casi in cui H è finito dimensionale $\sigma_r(T) = \sigma_c(T) = \emptyset$.

Notiamo inoltre che

$$\mathbf{C} = \rho(T) \cup \sigma(T) = \rho(T) \cup \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T) \quad (8.3)$$

Notiamo ancora che se

$$T_\lambda x = 0 \quad (8.4)$$

per qualche $x \neq 0$ allora l'inverso R_λ non esiste, quindi $\lambda \in \sigma_p$, λ è detto autovalore e x autovettore. Quindi la definizione di spettro puntuale equivale alla condizione per cui l'eq. (8.4) abbia una soluzione non banale. Il sottospazio costituito dal vettore nullo e dagli autovettori corrispondenti all'autovalore λ è detto *autospazio*.

Teorema Se T è un operatore chiuso (in particolare limitato) e $\lambda \in \rho(T)$ allora R_λ è definito su tutto H ed è limitato.

Dimostrazione. Vedi [7] pag. 117.

Teorema L'insieme risolvente di un operatore T chiuso è aperto.

Dimostrazione. Vedi [7] pag. 117.

Quindi lo spettro di un operatore chiuso è chiuso.

Teorema Se x e y sono autovettori di un operatore T corrispondenti a due autovalori distinti $\lambda_1 \neq \lambda_2$ allora essi sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Supponiamo che siano dipendenti. Allora $y = \alpha x$ e

$$\lambda_2 \alpha x = Ty = T\alpha x = \alpha \lambda_1 x \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \quad (8.5)$$

contrariamente all'ipotesi.

Esempio 1 L'operatore di proiezione ortogonale. Lo spettro di $P : H \rightarrow M$ è interamente puntuale e consiste dei due autovalori $\lambda = 0, 1$. Infatti per $\lambda = 0, 1$ l'equazione $Px = \lambda x$ ha soluzione non banali corrispondenti a $x = (I - P)u$ e $x = Pu \forall u \in H$. Quindi P e $I - P$ non ammettono inverso. Ogni $\lambda \neq 0, 1$ sta nell'insieme risolvente $\rho(P)$. Infatti l'equazione $(P - \lambda I)x = y$ ammette la soluzione $x = \frac{1}{\lambda}(\frac{1}{1-\lambda}Py - y) \forall \lambda \in \rho(P)$. Si verifica inoltre che l'operatore risolvente è limitato.

Esempio 2 Consideriamo l'operatore di moltiplicazione per x in $L^2[0, 1]$, definito da

$$Tf(x) = xf(x) \quad f \in L^2[0, 1] \quad (8.6)$$

L'equazione $(x - \lambda)f(x) = 0$ ha solo la soluzione banale $f(x) = 0$, ovvero esiste l'inverso di $T - \lambda I$. Perciò T non ha autovalori.

Consideriamo allora l'equazione

$$(x - \lambda)f(x) = g(x) \quad (8.7)$$

Questa ha la soluzione $f(x) = g(x)/(x - \lambda)$: se λ non appartiene all'intervallo $[0, 1]$ il dominio di $(x - \lambda)^{-1}$ è tutto $L^2[0, 1]$ e inoltre questo operatore è limitato. Infatti

$$\|f\| = \int_0^1 \frac{|g|^2}{|x - \lambda|^2} dx \leq \frac{1}{c^2} \|g\| \quad (8.8)$$

dove $c = \min_{\lambda \notin [0,1], x \in [0,1]} |x - \lambda|$. Quindi $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid \lambda \notin [0, 1]\}$. Se $\lambda \in [0, 1]$ la soluzione è in $L^2[0, 1]$ solo se $g(x)$ si annulla in modo sufficientemente rapido in $x = \lambda$. Questo insieme di funzioni è comunque denso in $L^2[0, 1]$. Quindi l'inverso di $T - \lambda$ è non limitato (vedi Esempio 3), ha dominio denso in $L^2[0, 1]$, quindi $\sigma(T) = \sigma_c(T) = [0, 1]$.

Nel caso in cui T sia l'operatore di moltiplicazione definito su $L^2(\mathbf{R})$ si verifica che $\sigma(T) = \sigma_c(T) = \mathbf{R}$.

Esempio 3. Verifica che l'operatore $R_\lambda = T_\lambda^{-1}$, con $T_\lambda = Q - \lambda$, è non limitato. Consideriamo la successione

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 & \lambda - \frac{1}{n} \leq x \leq \lambda + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (8.9)$$

Definiamo $f_n = g_n / \|g_n\|$. Si verifica che

$$\|T_\lambda f_n\| \leq \frac{1}{n} \quad (8.10)$$

quindi T_λ è limitato. Definiamo poi

$$h_n = \frac{T_\lambda f_n}{\|T_\lambda f_n\|} \quad (8.11)$$

h_n è nel range di T_λ e quindi nel dominio di R_λ . Applicando R_λ otteniamo

$$\|R_\lambda h_n\| = \frac{1}{\|T_\lambda f_n\|} \|f_n\| \geq n \quad (8.12)$$

e quindi l'operatore R_λ non è limitato.

8.2 Spettri di operatori simmetrici, autoaggiunti, unitari

Definizione Sia N un operatore chiuso densamente definito in H . Sia N^* l'aggiunto di N e D_{N^*} il suo dominio (che è denso in H). Si dice che N è un operatore normale se

$$NN^* - N^*N = 0 \quad \text{su } D_N \cap D_{N^*} \quad (8.13)$$

Gli operatori unitari ed quelli autoaggiunti sono normali.

Teorema Sia N un operatore chiuso densamente definito in H . Sia N^* l'aggiunto di N e D_{N^*} il suo dominio.

i) Se N è normale, $D_{N^*} = D_N$

ii) N è normale se e solo se

$$\|N^*x\| = \|Nx\| \quad \forall x \in D_N \quad (8.14)$$

Dimostrazione. i) [4] p.370.

ii) Sia N normale. Allora

$$\begin{aligned}\|N^*x\|^2 &= \langle N^*x, N^*x \rangle = \langle x, NN^*x \rangle = \langle x, N^*Nx \rangle = \langle N^{**}x, Nx \rangle \\ &= \langle Nx, Nx \rangle = \|Nx\|^2\end{aligned}\quad (8.15)$$

dove abbiamo fatto uso della (6.76). Viceversa se vale la (8.14), calcolandola con $x = y + z$ e $x = y + iz$, si ricava

$$\langle N^*y, N^*z \rangle = \langle Ny, Nz \rangle \quad \forall y, z \in D_N \cap D_{N^*} \quad (8.16)$$

ovvero

$$\langle y, (NN^* - N^*N)z \rangle = 0 \quad \forall y, z \in D_N \cap D_{N^*} \quad (8.17)$$

Poichè $D_N \cap D_{N^*} = D_N$ è denso in H , ne segue $(NN^* - N^*N)x = 0$ e quindi $NN^* - N^*N = 0$.

Teorema Sia T un operatore densamente definito in H . Allora se $\lambda \in \sigma_r(T)$, si ha anche $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$.

Dimostrazione. Poichè $\lambda \in \sigma_r(T)$ allora $\bar{D}_{(T-\lambda I)^{-1}} = \bar{R}_{T-\lambda I} \neq H$ e quindi $R_{T-\lambda I}^\perp \neq \{0\}$. Ma per la (6.71), $\{0\} \neq R_{T-\lambda I}^\perp = N_{T^*-\bar{\lambda}I}$ da cui segue la tesi.

Teorema Sia T un operatore normale. Allora $\sigma_r(T) = \emptyset$.

Dimostrazione. Supponiamo $\sigma_r(T) \neq \emptyset$. Se $\lambda \in \sigma_r(T)$ allora $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$ ovvero esiste un $x \neq 0$ tale che

$$(T^* - \bar{\lambda}I)x = 0 \quad (8.18)$$

Ma se T è normale anche $T - \lambda I$ lo sarà e quindi

$$\|(T - \lambda I)x\| = \|(T^* - \bar{\lambda}I)x\| = 0 \quad (8.19)$$

e quindi $\lambda \in \sigma_p(T)$ contrariamente all'ipotesi. Ne segue $\sigma_r(T) = \emptyset$.

Quindi gli operatori autoaggiunti e quelli unitari hanno spettro residuo vuoto.

Teorema Sia T simmetrico. Se $\lambda \notin \mathbf{R}$, allora $\lambda \in \sigma_r(T)$ o $\rho(T)$.

Consideriamo l'equazione

$$(T - \lambda)x = y \quad (8.20)$$

Prendendo il prodotto interno con x , abbiamo

$$\langle x, Tx \rangle - \lambda\|x\|^2 = \langle x, y \rangle \quad (8.21)$$

Poiché T è simmetrico prendendo la parte immaginaria è

$$-Im(\lambda)\|x\|^2 = Im(\langle x, y \rangle) \quad (8.22)$$

Quindi se $\lambda \notin \mathbf{R}$, $y = 0$ implica $x = 0$ ovvero $T - \lambda$ ammette inverso. Inoltre

$$|Im(\lambda)\|x\|^2| = |Im(\langle x, y \rangle)| \leq |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\| \quad (8.23)$$

Assumendo $x = (T - \lambda)^{-1}y$ otteniamo

$$\|(T - \lambda)^{-1}y\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im}(\lambda)|} \|y\| \quad (8.24)$$

Pertanto l'inverso esiste ed è limitato. Quindi ogni λ non reale appartiene al risolvente o allo spettro residuo.

Di conseguenza $\sigma_p(T)$ e $\sigma_c(T)$ sono contenuti in \mathbf{R} .

Ne segue che lo spettro di un operatore autoaggiunto è reale.

Teorema Sia T un operatore simmetrico. Se λ_1, λ_2 sono due autovalori distinti, e x_1, x_2 i corrispondenti autovettori, x_1 e x_2 sono ortogonali.

Dimostrazione. Per quanto visto sopra λ_1 e λ_2 sono reali. Inoltre

$$\lambda_1 \langle x_2, x_1 \rangle = \langle x_2, Tx_1 \rangle = \langle Tx_2, x_1 \rangle = \lambda_2 \langle x_2, x_1 \rangle \quad (8.25)$$

da cui $(\lambda_1 - \lambda_2) \langle x_2, x_1 \rangle = 0$ che implica $\langle x_2, x_1 \rangle = 0$.

Teorema Sia U un operatore unitario. Lo spettro $\sigma(U) = \sigma_p(U) \cup \sigma_c(U)$ sta sulla circonferenza unitaria $|\lambda| = 1$.

Dimostrazione. Poichè U è normale $\sigma_r(U) = \emptyset$. Essendo U normale segue

$$\|(U - \lambda I)x\| \geq \left| \|Ux\| - |\lambda| \|x\| \right| = \left| \|x\| - |\lambda| \|x\| \right| = |1 - |\lambda|| \|x\| \quad (8.26)$$

Quindi se $|\lambda| \neq 1$ l'equazione $(U - \lambda)x = 0$ ha la sola soluzione $x = 0$ quindi l'operatore $U - \lambda$ è invertibile.

Inoltre posto $x = (U - \lambda)^{-1}y$ si ha

$$\|(U - \lambda)^{-1}y\| \leq \frac{1}{|1 - |\lambda||} \|y\| \quad (8.27)$$

quindi l'operatore $(U - \lambda)^{-1}$ è limitato. Il suo dominio è tutto H quindi se $\lambda \neq 1$ $\lambda \in \rho(U)$. Lo spettro

$$\sigma(U) \subset \{\lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| = 1\} \quad (8.28)$$

Teorema Sia T un operatore limitato. Il suo spettro sta sul disco $|\lambda| \leq \|T\|$.

9 Operatori compatti

Una classe importante di operatori, soprattutto in relazione alle equazioni integrali, è quella degli operatori compatti.

Definizione Un operatore $T : H \rightarrow H$ è *compatto* se trasforma ogni sottoinsieme limitato di H in un insieme relativamente compatto.

Ricordiamo che un insieme è relativamente compatto se la sua chiusura è compatta.

Teorema Un operatore T è compatto se per ogni successione $\{x_n\}$ convergente $\{Tx_n\}$ contiene una sottosuccessione convergente.

Se T non fosse limitato allora potremmo trovare una successione tale che $\|Tx_n\| \rightarrow \infty$. Quindi solo gli operatori limitati possono esser compatti.

Teorema L'insieme degli autovalori di un operatore compatto è numerabile e il solo possibile punto di accumulazione è $\lambda = 0$. Il punto $\lambda = 0$ è nello spettro continuo o in quello residuo.

Definizione Un operatore T è detto di *Hilbert - Schmidt* se la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle Te_k, Te_k \rangle < \infty \quad (9.1)$$

con e_k sistema ortonormale completo.

Si dimostra che la somma (9.1) assume lo stesso valore in ogni base ortonormale e completa.

Questa definizione permette di generalizzare quella di norma di matrice, $\|A\| = \left(\sum_{j,k=1}^n |A_{jk}|^2\right)^{1/2} = (\text{Tr}(A^*A))^{1/2}$.

Definizione Un operatore T è detto di *classe traccia* se la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, Te_k \rangle$ converge. La somma $\sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, Te_k \rangle$ è detta *traccia*.

Questa proprietà generalizza la nozione di traccia di matrice.

Le varie classi di operatori introdotti soddisfano alle seguenti inclusioni:

op. limitati \supset op. compatti \supset op. di Hilbert Schmidt \supset op. classe traccia

Esempio 1 Dato che in uno spazio di Hilbert finito dimensionale ogni insieme limitato è relativamente compatto, ogni operatore definito su di esso è compatto.

Esempio 2 Il prototipo di operatore di Hilbert - Schmidt è l'operatore

$$(Kf)(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) dy \quad (9.2)$$

con $K \in L^2[0, 1]$ ovvero tale che

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(x, y)|^2 dx dy < \infty \quad (9.3)$$

Per la dimostrazione vedi [8] pag. 93.

Esempio 3 L'operatore densità ρ della meccanica quantistica è un esempio di operatore di classe traccia ($\text{Tr}\rho = 1$). Nel caso generale ρ descrive una miscela di stati, nel caso in cui ρ è un proiettore si ha uno stato puro.

10 Teoria spettrale e decomposizione spettrale

Sia H uno spazio di Hilbert di dimensione finita n e T un operatore autoaggiunto su H . Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$, $q \leq n$ gli autovalori (reali e distinti) della matrice hermitiana che rappresenta l'operatore in una base (una matrice hermitiana è diagonalizzabile e i suoi autovalori sono reali).

Ogni vettore $x \in H$ ha una unica decomposizione come $x = x_1 + x_2 + \dots + x_q$ con $x_i \in M_{\lambda_i}$, autospazio corrispondente all'autovalore λ_i . Ovvero lo spazio H è somma diretta degli autospazi $H = M_{\lambda_1} \oplus M_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus M_{\lambda_q}$. Introducendo i proiettori ortogonali, P_i , su ciascun sottospazio definiti da $x_i = P_i x$ l'operatore T può scriversi nella forma

$$T = \sum_{i=1}^q \lambda_i P_i \quad (10.1)$$

dove i P_i sono i proiettori ortogonali sugli autospazi corrispondenti agli autovalori λ_i

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_i \quad \sum_{i=1}^q P_i = I \quad (10.2)$$

Lo sviluppo (10.1) si dice *decomposizione spettrale* dell'operatore T . Definiamo gli operatori

$$Q_0 = 0 \quad Q_m = \sum_{i=1}^m P_i \quad m = 1, \dots, q \quad (10.3)$$

Si ha, nel caso in cui $l \leq m$,

$$Q_l Q_m = \sum_{i=1}^l P_i \sum_{j=1}^m P_j = \sum_{i=1}^l P_i = Q_l = Q_m Q_l \quad (10.4)$$

ed inoltre $Q_q = I$. Dato che vale $P_i = Q_i - Q_{i-1}$ sarà

$$T = \sum_{i=1}^q \lambda_i (Q_i - Q_{i-1}) \quad (10.5)$$

Nel caso infinito dimensionale è possibile trovare una rappresentazione che generalizza la (10.1) utilizzando il concetto di famiglia spettrale. Nel caso generale lo spettro avrà una parte discreta ed una parte continua, quindi la sommatoria sarà sostituita da un integrale.

Definizione Una *famiglia spettrale* o *risoluzione dell'identità* su uno spazio di Hilbert H è una funzione della retta a valori operatoriali

$$\lambda \rightarrow E_\lambda \quad (10.6)$$

con le seguenti proprietà

- i) E_λ è una proiezione ortogonale
- ii) $E_\lambda E_\mu = E_\lambda = E_\mu E_\lambda$ per $\lambda \leq \mu$
- iii) $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} E_{\lambda+\epsilon} = E_\lambda$
- iv) $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E_\lambda = 0$ $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_\lambda = I$

La convergenza nei limiti è quella forte, ovvero secondo la seguente definizione.

Definizione Se T_n è una successione di operatori in uno spazio di Hilbert H , diremo che T è il *limite forte* di T_n ($T = s - \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$) se

$$\|Tx - T_n x\| \rightarrow 0 \quad \forall x \in H \quad (10.7)$$

Esempio 1 Nel caso di un operatore autoaggiunto su uno spazio di Hilbert finito dimensionale, basta porre (supponiamo $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_q$)

$$E_\lambda = \begin{cases} 0 & \lambda < \lambda_1 \\ Q_i & \lambda_i \leq \lambda < \lambda_{i+1} \quad i = 1 \dots q-1 \\ I & \lambda \geq \lambda_q \end{cases} \quad (10.8)$$

Se indichiamo con dE_λ

$$dE_\lambda = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (E_{\lambda+\epsilon} - E_{\lambda-\epsilon}) \quad (10.9)$$

possiamo anche scrivere

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda \quad (10.10)$$

dato che $dE_\lambda = 0$ per tutti i valori di λ tranne nei punti $\lambda = \lambda_i$ dove $dE_{\lambda_i} = Q_i - Q_{i-1} = P_i$.

Teorema spettrale Sia T un operatore autoaggiunto definito in H . Allora esiste una e una sola famiglia spettrale E_λ su \mathbf{R} tale che

$$\langle x, Ty \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d \langle x, E_\lambda y \rangle \quad (10.11)$$

$\forall x \in H$ e $y \in D_T$ con

$$D_T = \left\{ x \in H \mid \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d \langle x, E_\lambda x \rangle < \infty \right\} \quad (10.12)$$

L'integrale nelle (10.11) e (10.12) è quello di Stieltjes.

Dimostrazione. [9] pag. 250.

Simbolicamente scriviamo

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda \quad (10.13)$$

dove l'integrazione è sullo spettro dell'operatore.

Definizione Data due funzioni a valori complessi $F(\lambda)$ e $\sigma(\lambda)$, diremo che esiste l'integrale di Riemann-Stieltjes

$$\int_a^b F(\lambda) d_\lambda \sigma(\lambda) \quad (10.14)$$

se per ogni successione di suddivisioni $a = \lambda^{(0)} \leq \lambda^{(1)} \leq \dots \leq \lambda^{(n)} = b$ dell'intervallo $[a, b]$, tale che $\delta = \max_{k=1, \dots, n} (\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)})$ tende a zero, e per ogni scelta di $\lambda^{(k)} \in [\lambda^{(k-1)}, \lambda^{(k)}]$, esiste il limite

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n F(\lambda^{(k)}) [\sigma(\lambda^{(k)}) - \sigma(\lambda^{(k-1)})] \quad (10.15)$$

ed è indipendente dalla successione di suddivisioni. L'integrale improprio è definito nel modo seguente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) d_\lambda \sigma(\lambda) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b F(\lambda) d_\lambda \sigma(\lambda) \quad \blacksquare \quad (10.16)$$

Possiamo generalizzare la (10.11), data una funzione continua a valori reali o complessi $f(x)$, per definire $f(T)$, anche nel caso in cui T sia autoaggiunto ma non limitato

$$\langle x, f(T)y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d \langle x, E_\lambda y \rangle \quad (10.17)$$

con $x \in H$ e $y \in D_{f(T)}$ con

$$D_{f(T)} = \left\{ x \in H \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 d \langle x, E_\lambda x \rangle < \infty \right\} \quad (10.18)$$

Un esempio di funzione di operatore è l'operatore risolvente

$$R_z(T) = (T - zI)^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - z)^{-1} dE_\lambda \quad (10.19)$$

Teorema spettrale Sia U un operatore unitario. Allora esiste una e una sola famiglia spettrale E_λ su $[-\pi, \pi]$ tale che

$$\langle x, Uy \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \exp i\lambda d \langle x, E_\lambda y \rangle \quad (10.20)$$

$\forall x, y \in H$.

Dimostrazione. [9] pag. 241 e seguenti.

Definizione Gruppo unitario ad un parametro fortemente continuo è un mapping dalla retta reale nell'insieme degli operatori limitati

$$t \rightarrow U_t \quad (10.21)$$

tale che

$$s - \lim_{\tau \rightarrow 0} U_{t+\tau} = U_t \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad (10.22)$$

$$U_t^* = U_t^{-1}, U_t U_s = U_s U_t = U_{t+s} \quad \forall t, s \in \mathbf{R}.$$

Per un gruppo unitario ad un parametro vale il seguente teorema.

Teorema di Stone Sia $\{U_t\}$, $t \in \mathbf{R}$ un gruppo unitario ad un parametro fortemente continuo su uno spazio di Hilbert H . Allora esiste un operatore autoaggiunto X tale che

$$U_t = e^{iXt} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad (10.23)$$

L'operatore X è detto *generatore infinitesimo* di $\{U_t\}$.

Dimostrazione. [9] pag. 335 e seguenti. I gruppi unitari ad un parametro hanno un ruolo importante in meccanica quantistica nella descrizione dell'evoluzione temporale di un sistema quantistico e nella teoria delle trasformazioni unitarie.

Esempio 1 Sia $H = L^2[0, 1]$. Consideriamo l'operatore di moltiplicazione per x ,

$$Qf(x) = xf(x) \quad (10.24)$$

con $D_Q \subset L^2[0, 1]$. E'

$$\langle f, Qg \rangle = \int_0^1 \bar{f}(x)xg(x)dx = \int_0^1 yd\left(\int_0^y \bar{f}(x)g(x)dx\right) \quad (10.25)$$

Quindi

$$\langle f, Qg \rangle = \int_0^1 yd \langle f, E_y g \rangle \quad (10.26)$$

con

$$\langle f, E_y g \rangle = \int_0^y \bar{f}(x)g(x)dx = \int_0^1 \bar{f}(x)\chi_{[0,y]}(x)g(x)dx \quad (10.27)$$

dove $\chi_{[0,y]}(x)$ è la funzione caratteristica dell'intervallo $[0, y]$.

Quindi possiamo ricavare l'espressione esplicita per la famiglia spettrale

$$(E_y g)(x) = \chi_{[0,y]}(x)g(x) \quad (10.28)$$

Sono di facile verifica le proprietà della famiglia spettrale.

Esempio 2 Consideriamo l'operatore di moltiplicazione in $H = L^2(\mathbf{R})$. La famiglia spettrale è definita da

$$(E_y g)(x) = \chi_{(-\infty,y]}(x)g(x) \quad (10.29)$$

Infatti

$$\begin{aligned} \langle f, Qg \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x)xg(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} yd \langle f, E_y g \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} yd\left(\int_{-\infty}^y \bar{f}(x)g(x)dx\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y\bar{f}(y)g(y)dy \end{aligned} \quad (10.30)$$

11 Rigged Hilbert space

Consideriamo l'operatore differenziale $P = -i\frac{d}{dx}$ sullo spazio $H = L^2(\mathbf{R})$. Se studiamo l'equazione

$$Pf(x) = \lambda f(x) \quad \lambda \in \mathbf{R} \quad (11.1)$$

troviamo soluzioni $f(x) = \exp i\lambda x \notin L^2(\mathbf{R})$. Comunque il sistema $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp i\lambda x$ è un sistema completo e possiamo espandere una $f \in L^2(\mathbf{R})$ come trasformata di Fourier

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp(i\lambda x) Ff(\lambda) d\lambda \quad (11.2)$$

Quindi

$$Pf(x) = -i\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \lambda \exp(i\lambda x) Ff(\lambda) d\lambda \quad (11.3)$$

Pertanto la trasformata di Fourier serve allo stesso proposito della rappresentazione spettrale. Se poi consideriamo l'equazione per l'operatore di posizione Q

$$Qf(x) = \lambda f(x) \quad (11.4)$$

troviamo la soluzione $f(x) = \delta(x - \lambda) \notin L^2(\mathbf{R})$. In entrambi i casi troviamo soluzioni alle eq. (11.1)(11.4) nel campo delle distribuzioni. Possiamo interpretare queste soluzioni come *autofunzioni generalizzate*. In altre parole siamo partiti da un certo spazio vettoriale (per esempio lo spazio $\mathcal{S}(\mathbf{R})$). Da questo per completamento ci siamo ricavati lo spazio di Hilbert $L^2(\mathbf{R})$, utilizzando il prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle = \int \overline{f(x)} g(x) dx \quad (11.5)$$

Gli autovettori trovati non appartengono ad $L^2(\mathbf{R})$, ma sono distribuzioni su $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. Possiamo allora considerare come oggetto matematico appropriato la tripletta $\mathcal{S}, L^2, \mathcal{S}'$. \mathcal{S} è completo rispetto alla propria topologia, ma non lo è rispetto a quella di L^2 . \mathcal{S} è denso in L^2 . D'altra parte L^2 può esser immerso in \mathcal{S}' e inoltre \mathcal{S}' è completo. In generale considereremo V, H, V' dove V è uno spazio vettoriale, in cui è dato un prodotto interno, V' il suo duale ed H il completamento di V . Questa tripletta è detta *rigged Hilbert space* o *tripletta di Gelf'and*. Si può mostrare poi che c'è un mapping uno a uno (e il suo aggiunto) che porta V (risp. H) in un sottoinsieme denso in H (risp. V').

Possiamo allora dare la seguente

Definizione Sia T un operatore su V . Un funzionale $F \in V'$ tale che

$$F(Tx) = \lambda F(x) \quad \forall x \in V \quad (11.6)$$

è detto *autovettore generalizzato* dell'operatore T corrispondente all'autovalore λ .

Nel caso dell'operatore P il funzionale è quello definito dalla trasformata di Fourier

$$F(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) \exp(-i\lambda x) dx \quad (11.7)$$

ed è

$$F(Pf) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int [-i \frac{d}{dx} f(x)] \exp(-i\lambda x) dx = \lambda F(f) \quad (11.8)$$

Vale inoltre il seguente

Teorema Sia T un operatore autoaggiunto ciclico in un rigged Hilbert space $V \subset H \subset V'$. Allora l'insieme degli autovettori generalizzati, corrispondenti ad autovalori reali, è completo.

Se un operatore è ciclico allora lo spazio di Hilbert può esser rappresentato come spazio L^2 di funzioni a quadrato integrabile rispetto ad una opportuna misura $d\mu$. In questa rappresentazione l'operatore corrisponde alla moltiplicazione $xf(x)$.

Per esempio l'operatore Q o l'operatore P sono ciclici. Equivalentemente un operatore è ciclico se esiste un vettore $v \in V$ tale che $T^n v$, $n = 0, 1, \dots$ è denso in H . Infatti il vettore $f(x) = \exp(-x^2) \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ è tale che $p(x) \exp(-x^2)$, con $p(x)$ polinomio, è denso in $L^2(\mathbf{R})$.

Riferimenti bibliografici

- [1] E. K. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons
- [2] A. N. Kolmogorov e Fomin, *Elementi di Teoria delle Funzioni e di Analisi Funzionale*, Edizioni Mir
- [3] R. D. Richtmyer, *Principles of Advanced Mathematical Physics*, vol. I Springer-Verlag
- [4] W. Rudin, *Functional Analysis*, Mc Graw-Hill, New York, 1991
- [5] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, I: Functional Analysis*, Academic Press
- [6] V. S. Vladimirov, *Le Distribuzioni nella Fisica Matematica*, Mir, Mosca, 1981
- [7] G. Martucci, *Spazi di Hilbert con elementi di meccanica quantistica*, Pitagora Editrice, Bologna
- [8] W. Amrein, J. M. Jauch and K. B. Sinha, *Scattering Theory in Quantum Mechanics*, Benjamin
- [9] E. Prugovecki, *Quantum Mechanics in Hilbert Space*, Academic Press
- [10] I. M. Guelfand and G. E. Chilov, *Les Distributions*, Dunod, Paris, 1962
- [11] J. Horvath, *Topological Vector Spaces and Distributions*, Addison-Wesley, Reading, 1966
- [12] L. Schwartz, *Méthod Mathématiques pour les Sciences Physiques*, Hermann, Paris 1965
- [13] I. Stakgold, *Green's Functions and Boundary Value Problems*, John Wiley and Sons
- [14] J. Weidemann, *Linear Operators in Hilbert Spaces*, Springer-Verlag, New York, 1980
- [15] M. E. Taylor, *Partial Differential Equations I, Basic Theory*, Springer 1997
- [16] Guido Cosenza, *Metodi Matematici della Fisica*, Bollati Boringhieri, Torino 2004.