

“Metodi matematici per la fisica teorica”

Anno Accademico 2015-16

(parte II: algebre di Lie e rappresentazioni)

1 Esercizi

Se con ω_i indichiamo i pesi fondamentali dell'algebra semplice complessa \mathfrak{g} , indichiamo con (a_1, \dots, a_n) la rappresentazione di peso massimo $\Lambda = \sum_{i=1}^n a_i \omega_i$.

- 1) Esprimi il peso massimo della rappresentazione $(5, 3)$ di A_2 in funzione delle radici semplici.
- 2) Sapendo che $A_2 = sl(3, \mathbb{C}) = \{X \in M_3(\mathbb{C}), \text{Tr}(X) = 0\}$, scrivere i vettori radice. Scrivere una base per A_2 come algebra complessa, una per $su(3)$ e una per $sl(3, \mathbb{R})$ come algebre reali.
- 3) Calcola i pesi della rappresentazione $(1, 0, \dots, 0)$ di $\mathfrak{g} = A_n$. Esprimi le radici di A_n in funzione di questi pesi.
- 4) Calcola i pesi della rappresentazione $(0, 0, \dots, 1)$ di $\mathfrak{g} = A_n$.
- 5) Calcola il peso massimo della rappresentazione aggiunta di A_n . Determina le radici come pesi della rappresentazione aggiunta.
- 6) Calcola i pesi della rappresentazione $(2, 0)$ di A_2 .
- 7) Calcola i pesi della rappresentazione $(0, 2)$ di A_2 .
- 8) Calcola i pesi della rappresentazione $(3, 0)$ di A_2 .
- 9) Calcola i pesi della rappresentazione $(4, 3)$ di A_2 .

- 10) Decomponi in rappresentazioni irriducibili di A_2 $(1, 0) \otimes (1, 0)$.
- 11) Decomponi in rappresentazioni irriducibili di A_2 $(0, 1) \otimes (0, 1)$.
- 12) Decomponi in rappresentazioni irriducibili di A_2 $(1, 0) \otimes (0, 1)$.
- 13) Decomponi in rappresentazioni irriducibili di A_2 $(1, 0) \otimes (0, 2)$.
- 14) Decomponi in rappresentazioni irriducibili di A_2 $(1, 0) \otimes (1, 1)$.
- 15) Decomponi in rappresentazioni irriducibili di A_2 $(2, 1) \otimes (2, 1)$.
- 16) Decomponi in rappresentazioni irriducibili di A_2 $(3, 0) \otimes (1, 1)$.
- 17) Calcola i pesi della rappresentazione $(1, 0, \dots, 0)$ di B_n . Esprimi le radici di B_n come combinazione di questi pesi.
- 18) Calcola i pesi della rappresentazione $(1, 0, \dots, 0)$ di D_n . Esprimi le radici di D_n come combinazione di questi pesi.
- 19) Calcola i pesi della rappresentazione di spin $(0, \dots, 1)$ di B_n .
- 20) Calcola i pesi della rappresentazione di spin $(0, \dots, 1, 0)$ di D_n .
- 21) Calcola i pesi della rappresentazione di spin $(0, \dots, 0, 1)$ di D_n .
- 22) Scrivi una base per $D_2 = so(4, \mathbb{C})$ come algebra complessa, una per $so(4, \mathbb{R})$ e una per $so(3, 1)$ come algebre di Lie reali.
- 23) Trova il peso massimo della rappresentazione aggiunta di $so(2n)$.
- 24) Mostra che $sl(2, \mathbb{C})$ come algebra reale è isomorfa a $so(3, 1)$.