“Metodi matematici per la fisica teorica”

(parte II: algebre di Lie e rappresentazioni)

Anno Accademico 2014-2015

1 Programma

1) Definizioni, costruzioni generali e esempi. Definizione di algebra di Lie, reale e complessa. Esempi di algebre di Lie reali: $su(2)$ e $so(3, \mathbb{R})$. Omomorfismo fra algebre di Lie. Definizione di rappresentazione e di modulo, equivalenza fra rappresentazioni; rappresentazione irriducibile; rappresentazione aggiunta. Classificazione delle rappresentazioni finito dimensionali di $su(2)$. Estensione complessa di un'algebra di Lie reale. Esempi di algebre di Lie complesse: $gl(n, \mathbb{C})$, $sl(n, \mathbb{C})$, $sp(2n, \mathbb{C})$, $so(n, \mathbb{C})$.

Definizione di subalgebra di Lie, somma diretta di due algebre di Lie, ideale e algebra di Lie semplice. Costruzione dell'algebra di Lie quoziente. Algebra di Lie delle derivazioni e somma semidiretta di algebre di Lie. Esempio: algebra di Poincarè.

Algebre di Lie solubili e loro proprietà elementari. Esempi: $e(2)$, matrici triangolari superiori. Definizione di radicale $Rad(\mathfrak{g})$ e algebre di Lie semisemplici. Teorema: $\mathfrak{g}/Rad(\mathfrak{g})$ è semisemplice. Algebre di Lie nilpotenti. Esempio: algebra delle matrici strettamente triangolari superiori. Teorema di Levi Malcev.

2) Forma di Killing e criterio di semisemplicità. Definizione di forma di Killing. Calcolo della forma di Killing per $gl(n, \mathbb{C})$. Relazione fra la forma di Killing dell'algebra di Lie reale, la sua complessificazione e la complessificazione vista come algebra reale. Calcolo della forma di Killing di $sl(n, \mathbb{C}), su(n)$ e $sl(n, \mathbb{C})$ come algebra reale. Criterio di semisemplicità. Decomposizione di un'algebra semisemplice in somma diretta di algebre semplici.

Definizione di algebra di Lie compatta. Decomposizione di un'algebra compatta in somma diretta del suo centro e di un'algebra semisemplice. Esempi: $u(n)$ è un'algebra di Lie compatta, $sl(n, \mathbb{R})$ è non compatto.

3) Classificazione delle algebre complesse semplici. Decomposizione negli spazi di radici per $\mathfrak{g} = sl(n, \mathbb{C})$. Definizione di subalgebra torica e di subalgebra torica massimale (subalgebra di Cartan) di un'algebra di Lie semisemplice. Radici e vettori di radici. Proprietà delle radici. Assiomatizzazione di un sistema di radici. Definizione di gruppo di Weyl. Calcolo dei possibili sistemi di radici con rango 2. Radici positive e radici semplici. Proprietà delle radici semplici. Esempio: scelta delle radici positive e calcolo degli angoli fra radici semplici nel caso di $sl(n, \mathbb{C})$. Ricostruzione delle radici a partire dall'informazione delle radici semplici. Classificazione delle algebre semplici complesse mediante i diagrammi di Dynkin. Matrice di Cartan. Isomorfismi fra le algebre complesse determinati dai diagrammi di Dynkin.

4) Classificazione delle algebre semplici reali, (cenni). Enunciato del teorema: ogni algebra di Lie reale semplici è una forma reale di un'algebra semplice complessa oppure è un'algebra semplice complessa vista come algebra reale. Forma reale compatta. Le forme reali delle serie A, B, C, D e alcuni isomorfismi indotti dagli isomorfismi complessi.

5) Rappresentazioni finito dimensionali delle algebre complesse semplici. Algebra inviluppo universale. Base di Poincarè-Birkhoff-Witt. Costruzione dei moduli di Verma (cenni). Classificazione dei moduli finito dimensionali. Pesi integrali e dominanti. Pesi fondamentali.

Alcuni complementi: Ricostruzione dei pesi a partire dal peso massimo di una rappresentazione. Somma diretta, prodotto tensoriale di due rappresentazioni. Rappresentazioni completamente riducibili. Riduzione del prodotto tensoriale. Casimir quadratico. Rappresentazioni delle forme reali e unitarizzazione delle rappresentazioni (cenno).

2 Riferimenti bibliografici

Per i punti $1-4$, si raccomanda la lettura di

[BR] A.O. Barut, R. Raczka, *Theory of Group Representations and Applications*, capitolo I, sezioni 1-5.

Per il punto 5 si raccomanda la lettura di
[CSM] R. Carter, G Segal, I.Macdonald, *Lectures on Lie Groups and Lie Algebras*, London Mathematical Society, Student Text 32, Lecture *Lie algebras and Root system*, sezione 3. Si raccomanda comunque anche la lettura delle prime due sezioni.

Per i complementi del punto 5, si forniranno delle note. Il [BR] non contiene la definizione di matrice di Cartan che è contenuta nella sezione 2 della lezione 1 di [CSM]. Attenzione alla definizione di subalgebra di Cartan data in [BR], che differisce dalla definizione di subalgebra torica massimale data a lezione (la commutatività delle subalgebre toriche è derivata dalla definizione). La definizione data in [CSM] è differente; si può dimostrare l'equivalenza fra le due definizioni.

Sono richieste le dimostrazioni dei teoremi contenute in [BR] che sono state svolte a lezione.